Konačno dimenzionalni vektorski prostori

Dragan S. Đorđević

$$A = B^{-1}\begin{bmatrix} J(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & J(\lambda_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J(\lambda_k) \end{bmatrix} B$$

Niš, 2012.

Sadržaj

Predgovor

Sdržaj rukopisa predstavlja gradivo predviđeno za izlaganje u okviru predmete *Konačno dimenzionalni vektorski prostori*.

Konačno dimenzionalni vektorski prostori (u ovom slučaju nad poljem $\mathbb{C}$) predstavljaju prirodni nastavak materije koja je obrađena u predmetu Linearna algebra. Neki delovi teksta su od interesa studentima fizike ili tehnike. Za kompletno razumevanje teksta neopohodno je vladanje osnovnim pojmovima linearne algebre.

U ovom trenutku tekst nije kompletan. Konstantno se radi na poboljšanju materijala namenjenog studientima. Studenti su u obavezi da konsultuju dodatnu literaturu, koja je navedena u spisku referenci. Obavezno posetiti bilioteku Fakulteta.

Glava 1

Redukcija operatora

1.1 Linearni operatori, matrica linearnog operatora

Izučavanje konačno dimenzionalnih vektorskih prostora usko je povezano sa izučavanjem linearnih operatora na tim vektorskim prostorima. Neki rezultati važe za vektorske prostore nad proizvoljnim poljem. U pogledu primena, kao i sa aspeta razvijenosti same teorije, najvažniji su vektorski prostori nad poljima $\mathbb{C}$ i $\mathbb{R}$. Pri tome treba biti obazriv: nije obavezno da važe isti rezultati za realne i kompleksne vektorske prostore. Nadalje će vektorski prostori biti kompleksni, ukoliko specijalno ne naglasimo da se radi o realnim prostorima.

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Skup $B \subset V$ je (algebarska, Hamelova) baza prostora V, ako za svako $x \in V$ postoji jedinstven broj $n \in \mathbb{N}$, jedinstveno određeni vektori $e_1, \dots, e_n \in B$ i jedinstveni brojevi $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, tako da je $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$. Prostor V je konačno dimenzionalan, ako je broj elemenata baze konačan. Svake dve baze konačno dimenzionalnog vektorskog prostora V imaju isti broj elemenata, i taj broj se naziva dimenzija vektorskog prostora, u oznaci $\dim(V)$.

Skup svih (realnih ili kompleksnih) neprekidnih funkcija, koje su definisane na segmentu $[a, b]$, čine beskonačno dimenzionalni prostor (u odnosu na uobičajeno sabiranje funkcija, kao i množenje funkcije skalarom). Beskonačno dimenzionalni vektorski prostori su predmet izučavanja funkcionalne analize.

Nadalje su svi prostori konačno dimenzionalni. Ako je B baza vektorskog prostora V, onda smatramo da je B uređen skup, odnosno $B = (e_1, \dots, e_n)$. Ako je $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ reprezentacija vektora x u bazi B, tada je uobičajena matrična oznaka

$$[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_B = [x_1 \ \cdots \ x_n]_B^\top.$$

Očigledno, promena redosleda vektora baze B dovodi do promene matrice $[x]_B$ kojom je reprezentovan vektor x. Dakle, korespodencija $x \mapsto [x]_B$ iz skupa V u skup $\mathbb{C}^{n\times 1}$ je jednoznaačna samo ako se pretpostavi uređenost baze B.

Skup $\mathbb{R}^n$ je n-dimenzionalan realan vektorski prostor, a $\mathbb{C}^n$ je n-dimenzionalan kompleksan vektorski prostor, pri čemu je sabiranje uređenih n-torki, kao i množenje skalarom, definisano koordinatno.

Nula-vektor se označava sa 0. Vektori $e_1, \dots, e_k$ kompleksnog vektorskog prostora V su linearno nezavisni, ako za sve brojeve $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ važi implikacija

$$\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = 0 \implies \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Vektori su linearno zavisni, ako nisu linearno nezavisni.

Vektori baze vektorskog prostora su uvek linearno nezavisni. Štaviše, ako je $B = (e_1, \dots, e_n)$ baza vektorskog prostora V, onda ne postoji vektor $y \in V$, tako da je $y \neq e_i$ za svako $i = 1, \dots, n$, i istovremeno da je $(e_1, \dots, e_n, y)$ linearno nezavisan sistem vektora u V.

Neka su V_1, V_2 kompleksni vektorski prostori, i neka je $A : V_1 \to V_2$ preslikavanje. A je linearan operator, ako za svako $x, y \in V_1$ i svako $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ važi $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$. Jednostavnosti radi, uobičajeno je pisati Ax umesto $A(x)$. Skup svih linearnih operatora iz V_1 u V_2 označava se sa $L(V_1, V_2)$. Specijalno, $L(V_1) = L(V_1, V_1)$.

Neka su V_1, V_2 kompleksni vektorski prostori, pri čemu je $\dim V_1 = n$ i $\dim V_2 = m$. Neka je $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ baza prostora V_1, i neka je $B_2 = (f_1, \dots, f_m)$ baza prostora V_2. Ako je $x \in V_1$, tada je $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$

i $[x]_{B_1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}_{B_1}^\top$, za neke $x_j \in \mathbb{C}$. Tada je $Ax \in V_2$, te je $Ax = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i f_i$. Na osnovu linearnosti operatora A sledi da je

$$\sum_{i=1}^{m} y_i f_i = A\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j A e_j.$$

Važi $Ae_j \in V_2$, te je $Ae_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{i,j} f_i$, pri čemu su $a_{i,j}$ jedinstveno određeni kompleksni brojevi. Sledi da važi

$$\sum_{i=1}^{m} y_i f_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j\right) f_i.$$

Svaki vektor ima jedinstvenu linearnu reprezentaciju preko vektora baze, odakle sledi

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

ili, u matričnom zapisu

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{1.1}$$

Matrica

$${}_{B_2}[A]_{B_1} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

jeste matrica linearnog operatora A u odnosu na baze B_1 i B_2. Očigledno, jednakost vektora $y = Ax$ ima svoj ekvivalenat u matričnom zapisu:

$$[y]_{B_2} = {}_{B_2}[A]_{B_1}[x]_{B_1}.$$

Dakle, za date baze B_1 i B_2, kao i za dati linearni operator $A \in L(V_1, V_2)$ postoji jedinstvena matrica ${}_{B_2}[A]_{B_1}$ tako da za svako $x \in V_1$ važi reprezentacija (1.1). Očigledno, promena redosleda vektora baze dovodi do promene matrice linearnog operatora.

Sa druge strane, neka je $\tilde{B}$ proizvoljna kompleksna matrica tipa $m \times n$. Neka je $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j \in V_1$, odnosno $[x]_{B_1} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}_{B_1}^{\top}$. Tada je $\tilde{B}[x] = \tilde{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix}^{\top}$ matrica tipa $m \times 1$. Matrica $\tilde{y}$ može biti shvaćena kao matrica vektora $y = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i f_i$, odnosno $[y]_{B_2} = \tilde{y}$. Očigledno, preslikavanje

$$x \mapsto \tilde{B}[x] = \tilde{y}$$

je linearno preslikavanje iz V_1 u V_2, koje označavamo sa B. Sada je $\tilde{B} = {}_{B_2}[B]_{B_1}$. Dakle, ukoliko su baze B_1, B_2 prostora V_1, V_2 fiksirane, onda svakoj matrici $m \times n$ odgovara jedan linearan operator iz skupa $L(V_1, V_2)$.

Neka je $\mathbb{C}^{m \times n}$ skup svih kompleksnih matrica tipa $m \times n$, neka je V_1 kompleksan vektorski prostor dimenzije n i baze B_1, neka je V_2 kompleksan vektorski prostor dimenzije m i baze B_2. Neka je $\mathcal{B}_1$ skup svih baza prostora V_1, i neka je $\mathcal{B}_2$ skup svih baza prostora V_2. Na osnovu svega rečenog, korespodencija $(A, B_1, B_2) \mapsto {}_{B_2}[A]_{B_1}$ je bijekcija iz skupa $L(V_1, V_2) \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ u skup $\mathbb{C}^{m \times n}$.

Ako su baze B_1 i B_2 iste, koristićemo skraćenu oznaku $[A]_B = {}_B[A]_B$.

Ako je $A \in L(V_1, V_2)$, tada je $\mathcal{N}(A) = \{x \in V_1 : Ax = 0\}$ jezgro operatora A, dok je $\mathcal{R}(A) = \{Ax : x \in V_1\}$ slika operatora A. Nije teško proveriti da je $\mathcal{N}(A)$ potprostor od V_1, dok je $\mathcal{R}(A)$ potprostor od V_2.

Neka su V_1, V_2, V_3 vektorski prostori sa bazama, redom, B_1, B_2, B_3, i neka su $A \in L(V_1, V_2)$, $B \in L(V_2, V_3)$. Tada je kompozicija BA takođe linearan operator iz V_1 u V_3, odnosno $BA \in L(V_1, V_3)$. Neka su ${}_{B_2}[A]_{B_1}$ i ${}_{B_3}[B]_{B_2}$ odgovarajuće matrice. Neka je ${}_{B_2}[A]_{B_1} = [a_{ij}]_{m \times n}$ i ${}_{B_3}[B]_{B_2} = [b_{ij}]_{k \times m}$. Ako je $x = [x_1 \cdots x_n]_{B_1}^{\top}$, tada je

$${}_{B_3}[B]_{B_2 B_2}[A]_{B_1}[x]_{B_1} = {}_{B_3}[B]_{B_2} \begin{bmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{1i} a_{ij} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ki} a_{ij} x_j \end{bmatrix}.$$

Očigledno je $[BA] = [B][A]$. Takođe je $[\lambda A] = \lambda[A]$, ako je $\lambda \in \mathbb{C}$. Ako je $C, D \in L(X_1, V_2)$, tada je i $[C + D] = [C] + [D]$.

1.2 Invarijatni potprostori i sopstveni vektori

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$, neka je U potprostor od V, i neka je $A \in L(V)$.

Definicija 1.2.1. Potprostor U je invarijantan za operator A, ako je $A(U) \subset U$. Tada potprostor U redukuje operator A.

Očigledno, $\{0\}$ i V su invarijatni potprostori od A. Stoga se pod invarijantnim potprostorom operatora A uvek podrazumeva pravi potprostor, odnosno potprostor koji je različit od $\{0\}$ i V.

Definicija 1.2.2. Ako postoje netrivijalni potprostori U i W od V, tako da je $V = U \dot{+} W$ (odnosno, W je algebarski komplement od U u prostoru V), i ako je $A(U) \subset U$, $A(W) \subset W$, tada dekompozicija $V = U \dot{+} W$ kompletno redukuje A.

Neka je $V = U \dot{+} W$, $B_U = (e_1, \dots, e_n)$ je baza potprostora U i $B_W = (f_1, \dots, f_m)$ je baza potprostora W. Tada je $B_V = (e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m)$ baza prostora V. Neka je $A \in L(V)$ sa svojstvom $A(U) \subset U$, i neka je ${}_{B_V}[A]_{B_V} = [a_{ij}]_{(n+m)\times(n+m)}$ matrica operatora A u bazi B_V. Neka je

$$x = [x_1 \dots\ x_n\ y_1 \dots y_m]_{B_V}^{\top}$$

reprezentacija vektora $x \in V$ u bazi B_V. Tada je

$$\begin{aligned}
&{}_{B_V}[A]_{B_V}[x]_{B_V} = \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n + a_{1,n+1}y_1 + \cdots + a_{1,n+m}y_m \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n + a_{n,n+1}y_1 + \cdots + a_{n,n+m}y_m \\ a_{n+1,1}x_1 + \cdots + a_{n+1,n}x_n + a_{n+1,n+1}y_1 + \cdots + a_{n+1,n+m}y_m \\ \vdots \\ a_{n+m,1}x_1 + \cdots + a_{n+m,n}x_n + a_{n+m,n+1}y_1 + \cdots + a_{n+m,n+m}y_m \end{bmatrix}_{B_V} \\
&\in U \dot{+} W.
\end{aligned}$$

Pri tome, prvih n koordinata vektora Ax pripada potprostoru U, dok poslednjih m koordinata vektora Ax pripada potprostoru W. Neka je $x \in U$. Tada je $y_1 = \cdots = y_m = 0$, i takođe $Ax \in U$. Iz činjenice da su $x_1, \ldots, x_n$ proizvoljni kompleksni brojevi, na osnovu reprezentacije operatora A sledi da je $a_{n+i,j} = 0$ za svako $i = 1, \ldots, m$ i svako $j = 1, \ldots, n$. Drugim rečima, matrica kojom je reprezentovan operator A u datoj bazi B_V, jeste blok-gornje trougaona, odnosno

$$[A]_{B_V} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,n+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,n+m} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} & \cdots & a_{n+1,n+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+m,n+1} & \cdots & a_{n+m,n+m} \end{bmatrix}.$$

Ako se uvedu očigledne oznake

$$[A_1] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}, \ [A_3] = \begin{bmatrix} a_{1,n+1} & \cdots & a_{1,n+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,n+1} & \cdots & a_{n,n+m} \end{bmatrix},$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} a_{n+1,n+1} & \cdots & a_{n+1,n+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+m,n+1} & \cdots & a_{n+m,n+m} \end{bmatrix},$$

onda matrica operatora A u odnosu na bazu B_V jeste

$$[A]_{B_V} = \begin{bmatrix} [A_1] & [A_3] \\ 0 & [A_2] \end{bmatrix}.$$

Pri tome je 0 oznaka za nula-matricu odgovarajućeg tipa.

Specijalno, ako pretpostavimo da je $A(U) \subset U$ i $A(W) \subset W$, onda analognim rasuđivanjem zaključujemo da je matrica operatora A u odnosu na bazu B_V blok-dijagonalna, odnosno

$$[A]_{B_V} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1,n+1} & \cdots & a_{n+1,n+m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+m,n+1} & \cdots & a_{n+m,n+m} \end{bmatrix}.$$

Uz prethodne oznake, sledi da u bazi B_V važi

$$[A] = \begin{bmatrix} [A_1] & 0 \\ 0 & [A_2] \end{bmatrix}.$$

Ako je $I \in L(X)$ identički operator, jednostavno je videti da je matrica ovog operatora u svakoj bazi identička matrica. Stoga je oznaka $[I]_B = I_k$, pri čemu indeks k označava dimenziju jedinične matrice.

Tvrđenje 1.2.1. *Neka je $V = U \dot{+} W$ i $A \in L(V)$, pri čemu je $AU \subset U$ i $AV \subset V$. Ako je $A_1 = A|_U : U \to U$ redukcija operatora A na potprostor U, i ako je $A_2 = A|_W : W \to W$ redukcija operatora A na potprostor W, tada je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A_1) \dot{+} \mathcal{R}(A_2)$ i $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_1) \dot{+} \mathcal{N}(A_2)$.*

Dokaz. Očigledno, $\mathcal{R}(A_1) + \mathcal{R}(A_2)$ je potprostor od V. Iz činjenice $AU \subset U$ sledi da je $\mathcal{R}(A_1) \subset U$. Takođe, iz činjenice $AW \subset W$ sledi $\mathcal{R}(A_2) \subset W$. Kako je $U \cap W = \{0\}$, sledi $\mathcal{R}(A_1) \cap \mathcal{R}(A_2) = \{0\}$. Time je dokazano $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A_1) \dot{+} \mathcal{R}(A_2)$. Analogno se dokazuje $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_1) \dot{+} \mathcal{N}(A_2)$. □

Definicija 1.2.3. Neka je V vektorski prostor i $x \in V$. Vektorski potprostor generisan vektorom x naziva se lineal nad x, u oznaci $\operatorname{lin}\{x\}$.

Lako je proveriti da važi $\operatorname{lin}\{x\} = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Definicija 1.2.4. Neka je V vektorski prostor i $A \in L(V)$. Vektor $x \neq 0$ je sopstveni vektor operatora A, ako postoji $\lambda \in \mathbb{C}$, tako da je $Ax = \lambda x$. Drugim rečima, x je sopstveni vektor operatora A, ako je $\operatorname{lin}\{x\}$ invarijantan potprostor od A.

Neka je B baza vektorskog prostora V, $A \in L(V)$ i neka je $[A]_B = [a_{ij}]_{n\times n}$. Neka je $x \in V$ sopstveni vektor operatora A i neka je $\lambda \in \mathbb{C}$ odgovarajuća sopstvena vrednost. Ako je $[x]_B = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}_B^\top \neq 0$, tada iz $Ax = \lambda x$, sledi da je

$$([A]_{B_V} - \lambda [I]_{B_V})[x]_{B_V} = 0. \tag{1.2}$$

Poslednji izraz se može shvatiti kao homogen sistem jednačina sa parametrom λ i nepoznatim vektorom x. Na osnovu poznatog rezultata iz linearne algebre sledi da sistem jednačina (1.2) ima netrivijalno rešenje ako i samo ako je determinanta matrice jednaka nuli. Drugim rečima, za dati parametar $\lambda \in \mathbb{C}$ postoji ne-nula vektor $x \in V$ koji zadovoljava uslov $Ax = \lambda x$, ako i samo ako je λ rešenje jednačine $\det([A]-\lambda[I]) = 0$.

Sa druge strane, ako je $\lambda \in \mathbb{C}$, tada je

$$\det([A] - \lambda[I]) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

$$= (-1)^n \lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + p_1\lambda + p_0 = P_{A,B}(\lambda). \tag{1.4}$$

Polinom $\lambda \mapsto P_{A,B}(\lambda)$, koji se kraće označava sa $P_A(\lambda)$, ili $P(\lambda)$, jeste karakteristični polinom linearnog operatora A u bazi B.

Nije teško videti da je $p_{n-1} = (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A)$, gde je $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$ trag matrice $[A]_B$.

Poznato je da polinom stepena n ima n nula u skupu $\mathbb{C}$. Prema tome, svaki linearni operator na n-dimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru ima n sopstvenih vrednosti. Polinom sa realnim koeficijentima ne mora imati realne nule. Prema tome, linearan operator na n-dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru ne mora imati (realne) sopstvene vrednosti. Ova činjenica upravo daje praktičnu prednost kompleksnih vektorskih prostora u odnosu na realne vektorske prostore u mnogim slučajevima. Takođe postoje objektivne potrebe da se razmatraju realni vektorski prostori, kao što su problemi optimizacije, problemi sa konusima, i mnogi drugi. Stoga ne treba unapred zanemariti realne prostore. Interesanto je pomenuti da se kvantna mehanika zasniva na kompleksnim vektorskim prostorima, koji moraju biti beskonačno dimenzionalni.

Definicija 1.2.5. Ako je λ nula karakterističnog polinoma P_A reda k $(1 \leq k \leq n)$, tada je k algebarska višestrukost sopstvene vrednosti λ operatora A.

Definicija 1.2.6. Skup svih sopstvenih vrednosti operatora A naziva se spektar operatora A u oznaci $\sigma(A)$.

Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, tada je $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ uvek potprostor vektorskog prostora V. Jednostavno je proveriti da $x \in \mathcal{N}(A - \lambda I)$ ako i samo ako je $Ax = \lambda x$. Prema tome, $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ je skup svih sopstvenih vektora x koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ.

Od interesa je proceniti karakteristični polinom linearnog operatora pri promeni baze vektorskog prostora. Neka su $B_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ i $B_2 = (f_1, \ldots, f_n)$ baze vektorskog prostora V, i neka su $[A]_{B_1}$ i $[A]_{B_2}$ matrice operatora $A \in L(V)$ u ovim bazama, redom. Tada je $f_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} e_j$ $(i = 1, \ldots, n)$ razlaganje svakog vektora f_i preko vektora baze B_1. Na prirodan način dolazimo do nove matrice $P = [p_{ij}]_{n \times n}$. Vektori $f_1, \ldots, f_n$ su linearno nezavisni, odakle sledi da su vertikale matrice P linearno nezavisne, odnosno $\det(P) \neq 0$.

Neka je $x \in V$ proizvoljan vektor. Tada je

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \sum_{i=1}^{n} x_i' f_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i' e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i' \right) e_j.$$

Sledi da je $x_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} x_i'$ za svako $j = 1, \ldots, n$. U matričnom zapisu to znači $[x]_{B_1} = P^\top [x]_{B_2}$. Matrica P je invertibilna, odnosno $[x]_{B_2} = (P^\top)^{-1} [x]_{B_1}$.

Neka je sada $Ax = y$. Tada je, u odnosu na bazu B_i, ispunjeno $[A]_{B_i}[x]_{B_i} = [y]_{B_i}$, za $i = 1, 2$. Sledi da važi

$$[A]_{B_1}[x]_{B_1} = [y]_{B_1} = P^\top [y]_{B_2} = P^\top [A]_{B_2}[x]_{B_2} = P^\top [A]_{B_2} (P^\top)^{-1} [x]_{B_1},$$

odakle proizilazi $[A]_{B_1} = P^\top [A]_{B_2} (P^\top)^{-1}$, odnosno $(P^\top)^{-1} [A]_{B_1} P^\top = [A]_{B_2}$.

Matrica $Q = P^\top$ jeste matrica "prelaza" sa baze B_1 na bazu B_2. Dakle, $[A]_{B_2} = Q^{-1} [A]_{B_1} Q$.

Definicija 1.2.7. Operatori $A, B \in L(V)$ su slični, ako postoji invertibilan operator $C \in L(V)$, tako da je $A = CBC^{-1}$.

Sličnost dva operatora je ekvivalentna sličnosti odgovarajućih matrica tih operatora. Dakle, matrice jednog operatora A u različitim bazama jesu uzajamno slične. Lako je proveriti da slične matrice imaju jednake determinante.

Tvrđenje 1.2.2. *Karakteristični polinom p_A operatora $A \in L(V)$ ne zavisi od izbora baze prostora V.*

Dokaz. Neka su $B_1 = (e_1, \ldots, e_n)$ i $B_2 = (f_1, \ldots, f_n)$ baze prostora V, pri čemu je Q matrica "prelaza" sa baze B_1 na bazu B_2. Tada je

$$[A]_{B_2} - \lambda I_n = Q([A]_{B_1} - \lambda I_n)Q^{-1}.$$

Iz činjenice da slične matrice imaju jednake determinante, sledi da su karakteristični polinomi operatora A u obe baze međusobno jednaki. □

Definicija 1.2.8. (a) Broj $\mathrm{geom}(\lambda) = \dim \mathcal{N}(A - \lambda I)$ je geometrijska višestrukost sopstvene vrednosti $\lambda \in \sigma(A)$.

(b) Ako je $\lambda \in \sigma(A)$ nula karakterističnog polinoma P_A reda k, onda je broj $\mathrm{alg}(\lambda) = k$ algebarska višestrukost sopstvene vrednosti λ.

Odnos između geometrijske i algebarske višestrukosti sopstvene vrednosti dat je sledećom teoremom.

Teorema 1.2.1. *Ako je $A \in L(V)$ i $\lambda \in \sigma(A)$, onda je* $\mathrm{geom}(\lambda) \leq \mathrm{alg}(\lambda)$.

Dokaz. Neka je $\lambda \in \sigma(A)$ i neka je $B_1 = (e_1, \ldots, e_k)$ baza potprostora $\mathcal{N}(A - \lambda I)$. Postoje vektori $e_{k+1}, \ldots, e_n$, tako da je $B = (e_1, \ldots, e_n)$ baza prostora V. Potprostor $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ je invarijantan za A, pri čemu je $A|_{\mathcal{N}(A-\lambda I)} = \lambda I$. Soga je matrična forma operatora A data sa

$$[A]_B = \begin{bmatrix} \lambda I_k & X \\ 0 & Y \end{bmatrix},$$

pri čemu je I_k jedinična matrica imenzije k, dok su X, Y neke matrice odgovarajućih dimenzija. Sada je karakteristični polinom operatora A jednak

$$\begin{aligned} P_A(\mu) &= \det\left(\begin{bmatrix} (\lambda - \mu)I_k & X \\ 0 & Y - \mu I_{n-k} \end{bmatrix}\right) \\ &= \det([(\lambda - \mu)I_k]) \cdot \det([Y - \mu I_{n-k}]) \\ &= (\lambda - \mu)^k \det([Y] - \mu[I_{n-k}]). \end{aligned}$$

Sledi da je $\mathrm{alg}(\lambda) \geq k = \mathrm{geom}(\lambda)$. □

Tvrđenje 1.2.3. *Pretpostavimo da važi: $A \in L(V)$, dekompozicija $V = V_1 \dot{+} V_2$ kompletno redukuje operator A, $A_i = A|_{V_i} : V_i \to V_i$ $(i = 1, 2)$ je redukcija operatora A na potprostor V_i. Tada je $P_A = P_{A_1} P_{A_2}$.*

Dokaz. Neka je B_i baza potprostora V_i, $i = 1, 2$. Tada je $B = (B_1, B_2)$ baza prostora V. Karakteristični polinom ne zavisi od izbora baze. Koristeći činjenicu da je matrica operatora A u bazi B blok-dijagonalna, sledi da za $\lambda \in \mathbb{C}$ važi

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det([A]_B - \lambda I_n) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk}-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1}-\lambda & \cdots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= P_{A_1}(\lambda)P_{A_2}(\lambda). \end{aligned}$$

□

Na kraju ove sekcije dokazujemo rezultat o dijagonalnim matricama.

Tvrđenje 1.2.4. *Matrica operatora $A \in L(V)$ je dijagonalna ako i samo ako je baza sastavljena od sopstvenih vektora.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $B = (e_1, \dots, e_n)$ i da je svaki e_i sopstveni vektor operatora A. Tada postoje brojevi $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tako da je $Ae_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$. Neka je $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$. Tada je $y = Ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, ili u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$[A]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Obrnuto, pretpostavimo da je $B = (e_1, \dots, e_n)$ i da je

$$[A]_B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

Ako je $\lambda \in \mathbb{C}$, tada je

$$\det([A]_B - \lambda I_n) = (a_1 - \lambda)(a_2 - \lambda) \cdots (a_n - \lambda),$$

odakle sledi da je $\sigma(A) = \{a_1, \dots, a_n\}$. Lako je proveriti da je $Ae_i = a_i e_i$, odnosno e_i je sopstveni vektor operatotra A koji odgovara sopstvenoj vrednosti a_i. $\square$

1.3 Teorema Keli-Hamiltona

Ako je $Q(\lambda) = q_n\lambda^n + q_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + q_a\lambda + q_0$ proizvoljan polinom, i ako je $A \in L(V)$, tada se na prirodan način definiše $Q(A) = q_nA^n + q_{n-1}A^{n-1} + \cdots + q_1A + q_0I$, i analogno za odgovarajuću matricu $[A]$.

Teorema 1.3.1. *Ako je $A \in L(V)$ i ako je P_A karakteristični polinom operatora A, tada je $P_A(A) = 0$.*

Dokaz. Ako je $C \in L(V)$ i $[C]$ matrica operatora C u nekoj bazi, tada je $\mathrm{adj}([C])$ adjungovana matrica od $[C]$, za koju važi $\mathrm{adj}([C]) \cdot [C] = \det([C])I$.

Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in L(V)$ i

$$P_A(\lambda) = \det([A]-\lambda I) = (-1)^n\lambda^n + p_{n-1}\lambda^{n-1} + p_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + p_1\lambda + p_0.$$

Tada važi $\mathrm{adj}([A]-\lambda I)\cdot([A]-\lambda I) = P_A(\lambda)$. Elementi matrice $\mathrm{adj}([A]-\lambda I)$ su ko-faktori matrice $[A]-\lambda I$, i stoga su ovi elementi polinomi stepena $n-1$ po λ. Sledi da postoje konstantne matrice $\tilde{B}_0, \dots, \tilde{B}_{n-1}$, tako da je

$$\det([A] - \lambda I) = \tilde{B}_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \tilde{B}_0.$$

Neka je $B_j \in L(V)$ operator, tako da je $[B_j] = \tilde{B}_j$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Tada je

$$([B]_{n-1}\lambda^{n-1} + [B]_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + [B]_1\lambda + [B_0])([A] - \lambda I) = \det([A] - \lambda I)I,$$

odakle sledi

$$
\begin{aligned}
-[B]_{n-1} &= (-1)^n I,\\
[B_{n-1}][A]-[B_{n-2}] &= p_1 I,\\
[B_{n-2}][A]-[B_{n-3}] &= p_2 I,\\
&\vdots\\
[B_1][A]-[B_0] &= p_1 I,\\
[B_0][A] &= p_n I.
\end{aligned}
$$

Sada prvu jednakost pomnožimo sa A^n, drugu jednakost pomnožimo sa A^{n-1},..., poslednju jednakost pomnožimo sa I, i sve dobijene jednakosti saberemo. Dobija se $0 = P_A(A)$. $\square$

Sada dokazujemo rezulat o preslikavanju spektra operatora polinomom.

Teorema 1.3.2. *Neka je $A \in L(V)$ i neka je p proizvoljan polinom. Tada je*

$$\sigma(p(A)) = p(\sigma(A)),$$

odnosno $\mu \in \sigma(p(A))$ ako i samo ako postoji $\lambda \in \sigma(A)$ tako da je $\mu = p(\lambda)$.

Dokaz. $\supset$: Neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Posmatramo polinom q definisan kao $q(t) = p(t) - p(\lambda)$ za svako $t \in \mathbb{C}$. Tada za polinom q postoji faktorizacija

$$q(t) = p(A) - p(\lambda) = \alpha(t-\lambda)(t-\lambda_1)\cdots(t-\lambda_n),$$

gde su $\alpha, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Tada je

$$q(A) = \alpha(A-\lambda I)(A-\lambda_1 I)\cdots(A-\lambda_n I),$$

pri čemu svi operatori na desnoj strani jednakosti međusobno komutiraju. Kako je $\lambda \in \sigma(A)$ sledi da $A - \lambda I$ nije invertibilan operator, odakle sledi da $q(A)p(A) - p(\lambda)$ takođe nije invertibilan. Dakle, $p(\lambda) \in \sigma(p(A))$.

$\supset$: Pretpostavimo sada da je $\mu \in \sigma(p(A))$ i neka je polinom r definisan kao $r(t) = p(t) - \mu$ za svako $t \in \mathbb{C}$. Tada se polinom r faktoriše kao
$$r(t) = \beta(t - \mu_1) \cdots (t - \mu_k),$$
za neke $\beta, \mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{C}$. Važi
$$r(A) = p(A) - \mu I = \beta(A - \mu_1 I) \cdots (A - \mu_k I),$$
pri čemu svi operatori na desnoj strani jednakosti međusobno komutiraju. Iz činjenice $\mu \in \sigma(p(A))$ sledi da $r(A)$ nije invertibilan. Prema tome, ne mogu svi operatori $A - \mu_1 I, \ldots, A - \mu_k I$ biti invertibilni. Stoga postoji neko $\mu_i \in \sigma(A)$. Kako je $r(\mu_i) = 0$, sledi da je $\mu = p(\mu_i)$. $\square$

1.4 Invertibilni i nilpotentni operatori

Rang linearnog operatora $A \in L(V_1, V_2)$ definisan je kao rang matrice $[A]$, a označava se sa $\mathrm{rank}(A)$. Poznato je da rang operatora ne zavisi od izbora baza u prostorima V_1 i V_2. Takođe je $\mathrm{rank}(A) = \dim \mathcal{R}(A)$.

Determinanta operatora $A \in L(V)$ jednaka je upravo $\det([A])$, i determinanta ne zavisi od izbora baze u V. Ako je $A, B \in L(V)$, onda je $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ dobro poznata Koši-Bineova teorema.

Operator $A \in L(V_1, V_2)$ je invertibilan, ako postoji $B \in L(V_2, V_1)$ tako da je $AB = I_{V_2}$ i $BA = I_{V_1}$. Operator A je singularan, ako nije invertibilan. Ako su $A_1 \in L(V_1, V_2)$ i $A_2 \in L(V_2, V_3)$ invertibilni operatori, tada je $A_2 A_1 \in L(V_1, V_3)$ takođe invertibilan operator, što sledi na osnovu jednostavne provere $(A_2 A_1)^{-1} = A_1^{-1} A_2^{-1}$. Jednostavno je proveriti da je linearan operator $A \in L(V)$ invertibilan ako i samo ako je matrica $[A]$ invertibilna (još jednom izbor baze u V nije važan). Skup svih invertibilnih operatora iz $L(V_1, V_2)$ označava se sa $G(V_1, V_2)$. Specijalno, $G(V) = G(V, V)$.

Tvrđenje 1.4.1. *Skup $G(V)$ je (nekomutativna) multiplikativna grupa.*

Tvrđenje 1.4.2. *Neka je $A \in L(V)$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*

(a) *A je invertibilan;*
(b) *A je preslikavanje "1-1";*
(c) *A je preslikavanje "na";*

(d) $\operatorname{rank}(A) = \dim V$;
(e) $0 \notin \sigma(A)$.

Pored invertibilnih operatora, pokazuje se da važnu ulogu u teoriji operatora na konačno dimenzionalnim prostorima imaju i nilpotentni operatori. Operator $A \in L(V)$ je nilpotentan, ako postoji $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, tako da je $A^n = 0$. Ako je A nilpotentan, onda najmanji broj $n \in \mathbb{N}$ sa osobinom $A^n = 0$ jeste indeks nilpotentnosti operatora A, u oznaci $\mathrm{n}(A)$. Očigledno, $\mathrm{n}(A) = 1$ ako i samo ako je $A = 0$. Ako je A nilpotentan operator i $k \geq \mathrm{n}(A)$, tada je $A^k = 0$. Nije teško proveriti da ako je $A \in L(V)$ nilpotentan operator, onda A mora biti singularan. Na osnovu teoreme o preslikavanju spektra, može se dokazati sledeći rezultat.

Tvrđenje 1.4.3. *Ako je $A \in L(V)$ nilpotentan operator, tada je $\sigma(A) = \{0\}$.*

Nadalje smatramo da je $A \in L(V)$ i $n = \dim V$. Razmotrimo sledeće očigledne lance:

$$\{0\} \subset \mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(A^2) \subset \cdots ,$$
$$V \supset \mathcal{R}(A) \supset \mathcal{R}(A^2) \supset \cdots ,$$
$$n = \dim(V) \geq \operatorname{rank}(A) \geq \operatorname{rank}(A^2) \geq \cdots .$$

Dokazujemo nekoloko tvrđenja u vezi sa prethodnim lancima.

Tvrđenje 1.4.4. *$\mathcal{R}(A^k)$ je invarijantan potprostor za A, pri čemu je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathcal{R}(A^k)$. Tada postoji $y \in V$, tako da je $x = A^k y$. Tada je $Ax = A^{k+1}y = A^k(Ay) \in \mathcal{R}(A^k)$. $\square$

Tvrđenje 1.4.5. *Postoji najmanji broj $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ tako da je $\operatorname{rank}(A^p) = \operatorname{rank}(A^k)$ za svako $k \geq p$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\operatorname{rank}(A) = n = \dim V$. Tada je A invertibilan operator, i za svako $k \in \mathbb{N}$ važi $\operatorname{rank}(A^k) = n$. U ovom slučaju je $p = 0$.

Pretpostavimo da je $\operatorname{rank}(A) < n$. Tada je A singularan operator. Očigledno, postoji najmanji broj p tako da je $\operatorname{rank}(A^p) = \operatorname{rank}(A^{p+1})$.

Pri tome, p ne može biti veće od n, i $p = n - 1$ ako i samo ako je $n > \text{rank}(A) > \text{rank}(A^2) > \cdots > \text{rank}(A^{n-1}) > 0 = \text{rank}(A^n)$. Dakle, $1 \le p \le n$. Prema prethodnom tvrđenju, $\mathcal{R}(A^p)$ je invarijatnan potprostor od A, te se može posmatrati redukcija operatora $A_p = A|_{\mathcal{R}(A^p)} : \mathcal{R}(A^p) \to \mathcal{R}(A^p)$. Iz $\text{rank}(A^p) = \text{rank}(A^{p+1})$ sledi da je A_p invertibilan operator. Prema tome, $A_l = A^l|_{\mathcal{R}(A^p)} : \mathcal{R}(A^p) \to \mathcal{R}(A^p)$ je invertibilan operator za svako $l = 1, 2, \ldots$, odakle sledi da je $\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^p)$ za svako $k \ge p$. $\square$

Definicija 1.4.1. Najmanji prirodan broj p za koji je $\text{rank}(A^p) = \text{rank}(A^{p+1})$ jeste indeks operatora A i označava se sa $\text{ind}(A)$.

Za sliku i jezgro stepena operatora važi potpuno analogno tvrđenje kao i za rang operatora.

Tvrđenje 1.4.6. *Neka je $A \in L(V)$ i $p = \text{ind}(A)$. Tada za svako $l < p$ i svako $k \ge p$ važi $\mathcal{R}(A^l) \ne \mathcal{R}(A^{l+1})$, $\mathcal{N}(A^l) \ne \mathcal{N}(A^{l+1})$, $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^p)$, $\mathcal{N}(A^k) = \mathcal{N}(A^p)$.*

Dokaz. Neka je $A_l = A|_{\mathcal{R}(A^l)} : \mathcal{R}(A^l) \to \mathcal{R}(A^l)$. Ako je $l < p$, onda je A_l singularan olperator, odakle sledi $\mathcal{R}(A^l) \ne \mathcal{R}(A^{l+1})$. Na osnovu $\dim V = \dim \mathcal{R}(A^s) + \dim \mathcal{N}(A^s)$ za svako $s \in \mathbb{N}$, proizilazi da je $\mathcal{N}(A^l) \ne \mathcal{N}(A^{l+1})$. Iz istih razloga, ako je $k \ge p$, onda iz $\text{rank}(A^k) = \text{rank}(A^{k+1})$ sledi da je operator A^k invertibilan, te je i $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1})$ i $\mathcal{N}(A^k) = \mathcal{N}(A^{k+1})$. $\square$

Sada dokazujemo važnu teoremu o dekompoziciji linearnog operatora.

Teorema 1.4.1. *Neka je $A \in L(V)$ i neka je $p = \text{ind}(A)$. Tada važi $V = \mathcal{R}(A^p) \overset{\bullet}{+} \mathcal{N}(A^p)$, prethodna dekompozicija kompletno redukuje operator A, redukcija $A_1 : \mathcal{R}(A^p) : \mathcal{R}(A^p) \to \mathcal{R}(A^p)$ je invertibilan operator, dok redukcija $A_2 = A|_{\mathcal{N}(A^p)} : \mathcal{N}(A^p) \to \mathcal{N}(A^p)$ jeste nilpotentan operator, i $\text{n}(A_2) = \text{ind}(A)$.*

Dokaz. Dokazaćemo da je $\mathcal{R}(A^p) \cap \mathcal{N}(A^p) = \{0\}$. Pretpostavimo da je $x \in \mathcal{R}(A^p) \cap \mathcal{N}(A^p)$. Tada postoji $y \in V$ sa svojstvom $A^p y = x$, kao i $A^p x = 0$. Sledi da je $A^{2p} y = 0$, odnosno $y \in \mathcal{N}(A^{2p}) = \mathcal{N}(A^p)$. Stoga je $x = A^p y = 0$.

Očigledno, potprostori $\mathcal{R}(A^p)$ i $\mathcal{N}(A^p)$ su invarijanti za A. Ako je $A_1 : \mathcal{R}(A^p) : \mathcal{R}(A^p) \to \mathcal{R}(A^p)$, zbog $\operatorname{rank}(A^p) = \operatorname{rank}(A^{p+1})$ sledi da je A_1 invertibilan. Ako je $x \in \mathcal{N}(A^p)$, tada je $A_2^p x = A^p x = 0$, te je A_2 niplotentan operator. Očigledno, $\operatorname{n}(A_2) = \operatorname{ind}(A)$.

Neka je $x \in V$. Tada je $A^p x \in \mathcal{R}(A^p) = \mathcal{R}(A_1) = \mathcal{R}(A_1^p)$, te postoji neko $y \in \mathcal{R}(A^p)$ tako da je $A^p x = A_1^p y = A^p y$. Očigledno je $x = y + (x - y)$, $y \in \mathcal{R}(A^p)$ i $x - y \in \mathcal{N}(A^p)$. Stoga je $V = \mathcal{R}(A^p) \dot{+} \mathcal{N}(A^p)$. □

Ova teorema omogućava tradicionalni zapis operatora A kao $A = A_1 \dot{+} A_2$, i ova dekompozicija se naziva *invertibilno-nilpotentna*[1] dekompozicija operatora A.

Neposredna posledica prethodne teoreme jeste blok-dijagonalna forma matrice operatora A, koja se takođe naziva invertibilno-nilpotentna dekompozicija matrice $[A]$.

Posledica 1.4.1. *Neka je $A \in L(V)$ i $p = \operatorname{ind} A$. Neka je $B_1 = (e_1, \ldots, e_k)$ baza potprostora $\mathcal{R}(A^p)$, i neka je $B_2 = (e_{k+1}, \ldots, e_n)$ baza potprostora $\mathcal{N}(A^p)$. Tada je matrica operatora A u bazi $B = (B_1, B_2)$ blok-dijagonalna i ima formu*

$$[A]_B = \begin{bmatrix} [A_1] & 0 \\ 0 & [A]_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $k = \operatorname{rank}(A^p)$, $[A_1]$ je invertibilna, a $[A_2]$ je nilpotentna matrica.

Definicija 1.4.2. Neka je $A = A_1 \dot{+} A_2$ invertibilno-nilpotentna dekompozicija operatora A. Tada je $A^D = A_1^{-1} \dot{+} 0$ Drejzinov[2] inverz operatora A.

Neka je $[A]_B = \begin{bmatrix} [A_1]_{B_1} & 0 \\ 0 & [A_2]_{B_2} \end{bmatrix}$ invertibilno-nilpotentna dekompozicija matrice $[A]_B$. Tada je Drejzinov inverz od $[A]_B$ definisan kao $[A]_B^D = \begin{bmatrix} [A_1]_{B_1}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

[1] core-nilpotent

[2] Michael P. Drazin, američki matematičar

Teorema 1.4.2. *Neka je $A \in L(V)$ i $p = \operatorname{ind} A$. Tada je A^D jedinstven operator iz $L(V)$ za koji važi*

$$A^D A A^D = A, \quad AA^D = A^D A, \quad A^{p+1} A^D = A^p, \tag{1.5}$$

pri čemu je p najmanji prirodan broj sa navedenom osobinom.

Dokaz. Jednostavno je proveriti da A^D zadovoljava sve navedene osobine iz (1.5).

Sa druge strane, neka su $B, C \in L(V)$ operatori koji zadovoljavaju (1.5). Neka je $E = AB = BA$ i $F = AC = CA$. Tada je

$$E = AB = (AB)^p = A^p B^p = ACA^p B^p = AC(AB)^p = ACE = FE,$$

kao i

$$F = AC = (AC)^p = A^p C^p = C^p A^p = C^p A^p BA = (CA)^p E = FE.$$

Sledi da je $E = F$. Prema tome, važi

$$B = BAB = EB = FB = CAB = CE = CF = CAC = C.$$

Dakle, A^D je jedinstven operator koji zadovoljava uslove (1.5).

Važi $AA^D = I \dotplus 0$, tako da je $\mathcal{R}(AA^D) = \mathcal{R}(A^p)$ i $\mathcal{N}(AA^D) = \mathcal{N}(A^p)$. Iz $A^{p+1}A^D = A^p$ sledi $A^{k+1}A^D = A^k$ za svako $k \geq p$. Pretpostavimo da je $A^{l+1}A^D = A^l$ za neko $l < p$. Tada je $A^l(AA^D - I) = 0$, odnosno $0 = (A_1^l \dotplus A_2^l)(0 \dotplus (-I)) = 0 \dotplus (-A_2^l)$. Sledi da mora biti $A_2^l = 0$ za neko $l < p$, odakle proizilazi $\operatorname{ind} A \leq l < p$, što je nemoguće. $\square$

Operator A je invertibilan ako i samo ako je $\operatorname{ind} A = 0$. Na osnovu jedinstvenosti običnog i Drejzinovog inverza operatora, sledi da je u ovom slučaju $A^{-1} = A^D$.

Ako je $\operatorname{ind} A \leq 1$, tada operator A^D zadovoljava svojstva

$$A^D A A^D = A^D, \; AA^D A = A, \; AA^D = A^D A.$$

Lako je proveriti da u ovom slučaju multiplikativna polugrupa u $L(V)$, koja je generisana skupom $\{A, A^D\}$, jeste u stvari komutativna grupa, sa neutralnim elementom AA^D. Stoga se u ovom specijalnom slučaju Drejzinov inverz naziva i grupni inverz operatora A, a u upotrebi je oznaka $A^\#$ umesto A^D.

1.5 Prirodna baza nilpotentnog operatora

Definicija 1.5.1. Neka su $a_1, \ldots, a_k \in V$ ne-nula vektori. Tada je $a = (a_1, \ldots, a_k)$ nula-niz operatora $A \in L(V)$, ako je

$$Aa_1 = a_2,\ Aa_2 = a_3,\ \ldots\ , Aa_{k-1} = a_k,\ Aa_k = 0.$$

Vektor a_1 je prvi, a vektor a_k je poslednji član nula-niza a.

Tvrđenje 1.5.1. *Svaki nula-niz operatora $A \in L(V)$ sastoji se od linearno nezavisnih vektora.*

Dokaz. Neka je $k \geq 1$ i neka je $a = (a_1, \ldots, a_k)$ nula-niz operatora $A \in L(V)$. Pretpostavimo da je ovaj skup vektora linearno zavisan. Postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, koji nisu svi jednaki nuli, sa svojstvom

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k = 0. \tag{1.6}$$

Primenimo na prethodni izraz operator A^{k-1}. Proizilazi da važi $\lambda_1 a_k = 0$, te je $\lambda_1 = 0$. Primenimo na (1.6) operator A^{k-2}. Sledi da je $\lambda_2 a_1 = 0$, te je $\lambda_2 = 0$. Nastavljajući postupak, dolazimo do $\lambda_i = 0$ za svako $i = 1, \ldots, k$, što je nemoguće prema polaznoj pretpostavci. $\square$

Definicija nula-niza je data za proizvoljan operator A. Međutim, pravu primenu nula-nizovi nalaze kod nilpotentnih operatora. Jednostavno je dokazati sledeći rezultat.

Tvrđenje 1.5.2. *Neka je $A \in L(V)$ nilpotentan operator.*

(a) *Ako je $a = (a_1, \ldots, a_k)$ nula-niz operatora A, onda je $k \leq \mathrm{n}(A) \leq \dim V$.*

(b) *Postoji nula-niz $b = (b_1, \ldots, b_p)$ operatora A, pri čemu je $p = \mathrm{n}(A)$.*

Definicija 1.5.2. Baza B vektorskog prostora V je prirodna baza nula-nizova operatora $A \in L(V)$, ako postoje nula-nizovi $B_1, \ldots, B_l$ operatora A sa svojstvom $B = (B_1, \ldots, B_l)$.

Tvrđenje 1.5.3. *Ako postoji prirodna baza nula-nizova operatora A, tada je operator A nilpotentan, i $\mathrm{n}(A)$ je broj elemenata najdužeg nula-niza iz B.*

Tvrđenje 1.5.4. *Neka su* $B_i = (a_{i1}, \dots, a_{i,k_i})$ *nula-nizovi operatora* $A \in L(V)$, $i = 1, \dots, l$. *Tada je* $B = (B_1, \dots, B_l)$ *linearno nezavisan sistem, ako i samo ako je* $\{a_{1,k_1}, a_{2,k_2}, \dots, a_{l,k_l}\}$ *linearno nezavisan skup vektora.*

Dokazujemo fundamentalni rezultat o prirodnoj bazi nilpotentnog operatora.

Teorema 1.5.1. *Za svaki nilpotentan operator* $A \in L(V)$ *postoji prirodna baza nula-nizova operatora* A.

Dokaz. Neka je $\mathrm{n}(A) = p$ i uvedimo sledeće oznake: $N_k = \mathcal{N}(A^k)$ za $k = 1, 2, \dots, p$, i $K_j = A^{j-1}(N_j)$ za $j = 2, 3, \dots, p$. Očigledno, $N_k \subset N_{k+1}$. Takođe, iz $A(K_i) = \{0\}$ sledi $K_j \subset N_1$ za svako j. Na osnovu inkluzije $A(N_{i+1}) \subset N_i$ sledi

$$K_{i+1} = A^i(N_{i+1}) = A^{i-1}A(N_{i+1}) \subset A^{i-1}(N_i) = K_i.$$

Dakle, važi sledeći lanac inkluzija

$$K_p \subset K_{p-1} \subset K_3 \subset K_2 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_{p-1} \subset N_p = V.$$

Neka je $k_j = \dim K_j$, $n_i = \dim N_i$ i $n = \dim V$. Posmatramo bazu potprostora K_p, tu bazu dopunjujemo do baze potprostora K_{p-1}, i tako redom, dok ne dođemo do baze potprostora N_1. U skladu sa tim pravilom, dobijenu bazu potprostora N_1 označavamo sa

$$e_1^p, \cdots, e_{k_p}^p; e_{k_p+1}^{p-1}, \cdots, e_{k_{p-1}}^{p-1}; \cdots; e_{k_3+1}^2, \cdots, e_{k_2}^2; e_{k_2+1}^1, \cdots, e_{n_1}^1. \quad (1.7)$$

Dobijenu bazu proširujemo na sledeći način.

Iz činjenice $e_1^p \in K_p = A^{p-1}(N_p)$ sledi da postoji vektor $f_1^p \in N_p$ sa svojstvom $e_1^p = A^{p-1}f_1^p$. Primetimo da važi

$$f_1^p \in N_p,\ Af_1^p \in N_{p-1},\ A^2 f_1^p \in N_{p-2},\ \cdots,\ A^{p-1}f_1^p = e_1^p \in N_p,\ A^p f_1^p = 0.$$

Sledi da je $(f_1^p, Af_1^p, \dots, A^{p-1}f_1^p)$ jedan nula-niz operatora A. Na isti način kako smo uradili za vektor e_1^p, uradimo i za sve ostale vektore $e_2^p, \dots, e_{k_P}^p$. Dakle, postoje vektori $f_1^p, f_2^p, \dots, f_{k_p}^p \in N_p$, tako da je

$$f_i^p \in N_p,\ Af_i^p \in N_{p-1},\ A^2 f_i^p \in N_{p-2},\ \cdots,\ A^{p-1}f_i^p = e_i^p \in N_p,\ A^p f_i^p = 0,$$

za svako $i = 1, \dots, k_p$. Nastavljamo sa sličnim postupkom. Ako je $k_p + 1 \le i \le k_{p-1}$, tada je $e_i^{p-1} \in K_{p-1} = A^{p-2}(N_{p-1})$. Dakle, za svako $i = k_p + 1, \dots, k_{p-1}$ postoje vektori $f_i^{p-1} \in N_{p-1}$ tako da je $A^{p-2} f_i^{p-1} = e_i^{p-1}$, odnosno preciznije

$$f_i^{p-1} \in N_{p-1}, \; Af_i^{p-1} \in N_{p-2}, \; \dots \; , A^{p-2} f_i^{p-1} = e_i^{p-1}, \; A^{p-1} f_i^{p-1} = 0.$$

Nastavljajući postupak na očigledan način, dolazimo do sistema vektora

$$\begin{array}{ccccll} e_{k_p}^p; & e_{k_{p-1}}^{p-1}; & \cdots & e_{k_2}^2; \; e_{n_1}^1 & & \in N_1; \\ A^{p-2} f_{k_p}^p; & A^{p-3} f_{k_{p-1}}^{p-1}; & \cdots & A f_{k_2}^2 & & \in N_2; \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \\ A f_{k_p}^p; & A f_{k_{p-1}}^{p-1} & & & & \in N_{p-1}; \\ f_{k_p}^p & & & & & \in N_p. \end{array} \tag{1.8}$$

Pri tome treba razumeti da u tabeli (1.8) ima onoliko vertikala koliko u tabeli (1.7) ima elemenata. Zbog jednostavnosti pisanja, umesto vertikale ispod svakog elementa iz (1.7), pišemo vertikalu samo ispod jednog elementa sa karakterističnim indeksima.

Tabela (1.7) je očigledno prva horizontala iz tabele (1.8). Pošto je ova horizontala baza u N_1, odnosno predstavlja skup linearno nezavisnih vektora, sledi da je sistem vektora iz (1.8) takođe linearno nezavisan. Prema tome, svaka vertikala iz (1.8) predstavlja sistem nula-vektora, koji su baza odgovarajućeg lineala nad njima. Te lineale označimo sa V_i. Zbog linearne nezavisnosti sistema vektora (1.8), sledi da sistem svih baza po vertikalama čini prirodnu bazu operatora A u potprostoru W generisanim sistemom vektora (1.8).

Preostaje da dokažemo $\dim W = \dim V$, odakle sledi $W = V$, kao i tvrđenje teoreme.

Iz $A^i(N_{i+1}) = K_{i+1} \subset N_1 \subset N_{i+1}$ sledi da je N_{i+1} invarijantan za A^i. Iz $N_i \subset N_{i+1}$ takođe sledi da je $N(A^i) \subset N_{i+1}$. Dakle, posmatramo redukciju operatora $B_i = A^i|_{N_{i+1}} : N_{i+1} \to N_{i+1}$. Neka je $r_i = \operatorname{rank}(B_i) = \dim K_{i+1} = k_{i+1}$. Sada je, na primer, $B_1 = A|_{N_2} : N_2 \to N_2$, $\mathcal{N}(B_1) = N_1$ i $\mathcal{R}(B_1) = K_2$. Na osnovu osobine $\dim \mathcal{N}(B_1) + \dim \mathcal{R}(B_1) = \dim N_2$, sledi da je $n_1 + r_1 = n_2$. Na sličan način je $n_2 + r_2 = n_3, \dots, n_{p-1} + r_{p-1} = n_p$, $n_p = n = \dim V$. Na osnovu poslednjih jednakosti proizilazi da važi

$$n = n_1 + r_1 + r_2 + \dots + r_{p-1} = n_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_p.$$

Sa druge strane, broj vektora u tabeli (1.8) jeste:

$$\begin{aligned} l &= pk_p + (p-1)(k_{p-1} - k_p) + (p-2)(k_{p-2} - k_{p-1}) + \cdots \\ &\qquad +2(k_1 - k_2) + n_1 - k_1 \\ &= k_p + k_{p-1} + \cdots + k_2 + n_1 = n. \end{aligned}$$

Time je dokazana teorema. □

Od posebnog je interesa proučiti matricu nilpotentnog operatora A u bazi B prethodne teoreme. Na osnovu konstrukcije, svi potprostori V_i su invarijantni za A.

Neka je $V_i = \operatorname{lin} B_i$, $B_i = (A^{k_i-1}g, A^{k_i-2}g, \cdots, Ag, g)$. Ako je $x = [x_1 \ \cdots \ x_{k_i}]_{B_{k_i}}^\top \in V_i$ i ako je $y = A_i x = [y_1 \ \cdots \ y_{k_i}]_{B_{k_i}}^\top$, tada je

$$\begin{aligned} &y_1 A^{k_i-1}g + y_2 A^{k_i-2}g + \cdots + y_{k_i-1}Ag + y_{k_i}g = \\ &= x_2 A^{k_i-1}g + x_2 A^{k_i-2}g + \cdots + x_{k_i-1}A^2 g + x_{k_i}Ag, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{k_i-1} \\ y_{k_i} \end{bmatrix}_{B_{k_i}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{k_i-1} \\ x_{k_1} \end{bmatrix}_{B_{k_i}},$$

Prema tome, matrica operatora A_i u bazi B_{k_i} jeste:

$$[A_i]_{B_{k_i}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{B_{k_i}} = J_{k_i}(0),$$

i ova matrica se naziva elementarna Žordanova matrica koja odgovara nilpotentnom operatoru.

Sada je očigledno da matrica nilpotentnog operatora A u prirodnoj bazi nula-nizova koji njemu odgovaraju, jeste

$$[A]_B = \begin{bmatrix} J_{k_1}(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & Jk_2(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{k_l}(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu se mogu javiti sledeći slučajevi:

1) Po glavnoj dijagonali postoji samo elementarna nula-Žordanova matrica, odnosno ne postoje matrice $J_{k_i}(0)$ za $i = 1, \ldots, l$. Ovo je moguće samo u slučaju kada je $A = 0$.

2) Postoji bar jedna od matrica $J_{k_i}(0)$. To je moguće samo ako je $A \neq 0$. Tada je dimenzija najveće matrice $J_{k_i}(0)$ jednaka $n(A)$.

Posledica 1.5.1. *Ako je $A \in L(V)$ nilpotentan operator, tada je njegov karakteristični polinom $P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$, gde je $n = \dim V$.*

Primećujemo da se i sada može zaključiti $\sigma(A) = \{0\}$, ako je A nilpotentan operator.

Teorema 1.5.2. *Neka je $A \in L(V)$ singularan operator,* $\mathrm{ind}(A) = p$, *i neka je $p_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_l)^{m_l}$ karakteristični polinom operatora A. Tada je* $\dim \mathcal{N}(A^p) = m_1$.

Dokaz. Pod uslovima ove teoreme važi $V = \mathcal{R}(A^p) \dot{+} \mathcal{N}(A^p)$, ova dekompozicija kompletno redukuje A, $A_1 = A|_{\mathcal{R}(A^p)} : \mathcal{R}(A^p) \to \mathcal{R}(A^p)$ je invertibilan operator, i $A_2 = A|_{\mathcal{N}(A^p)} : \mathcal{N}(A^p) \to \mathcal{N}(A^p)$ je nilpotentan operator, pri čemu je $\mathrm{n}(A_2) = p$. Na osnovu ranijeg rezultata važi $P_A(\lambda) = P_{A_1}(\lambda) P_{A_2}(\lambda)$. Ako je $n_1 = \dim \mathcal{N}(A^p)$, tada je $P_{A_2}(\lambda) = (-1)^{n_1} \lambda^{n_1}$. Ako bi bilo $n_1 < m_1$, onda bi polinom $P_{A_1}(\lambda)$ imao faktor $\lambda^{m_1 - n_1}$, gde je $m_1 - n_1 > 0$. Međutim, poslednja situacija je nemoguća, jer je A_1 invertibilan operator. Sledi da je $n_1 = m_1$. $\square$

Posledica 1.5.2. (a) *Operator $A \in L(V)$ je nilpotentan ako i samo ako je $P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$, pri čemu je $n = \dim V$.*

(b) *Operator $A \in L(V)$ je nilpotentan, ako i samo ako je $\sigma(A) = \{0\}$.*

1.6 Žordanova normalna forma operatora

Neka je $A \in L(V)$. Ako postoji baza B prostora V i $\lambda \in \mathbb{C}$, tako da je

$$[A]_B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

tada je B prirodna baza operatora A, a odgovarajuća matrica jeste elementarna Žordanova matrica operatora A. Lako je proveriti da tada važi $\sigma(A) = \{\lambda\}$.

Ako je A nilpotentan operator, tada za A postoji prirodna baza, sastavljena od nula-nizova operatora A.

Dolazimo do centralne teoreme linearne algebre.

Teorema 1.6.1. *Ako je $A \in L(V)$, tada postoji prirodna baza B prostora V, i postoje kompleksni brojevi $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, sa svojstvom*

$$[A]_B = \begin{bmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_1}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{bmatrix},$$

pri čemu su $J_{k_l}(\lambda_l)$ elementarne Žordanove matrice.

Dokaz. Neka je

$$p_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_l)^{m_l}$$

karakteristični polinom operatora A, pri čemu su $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ sve različite sopstvene vrednosti operatora A. Posmatramo operator $B_1 = A - \lambda_1 I$, koji je singularan. Na osnovu teoreme o preslikavanju spektra polinomom, $\sigma(B_1) = \{\lambda - \lambda_1 : \lambda \in \sigma(S)\}$, te je karakteristični polinom operatora B dat sa

$$P_{B_1}(\lambda) = (-1)^n \lambda^{m_1} (\lambda - \lambda_2 + \lambda_1)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_l + \lambda_1)^{m_l}.$$

Na osnovu ranijeg rezultata, $V = V_1 \dot{+} V_1'$, pri čemu prethodna dekompozicija kompletno redukuje B, redukcija operatora B_1 na V_1 je nilpotentan operator, i redukcija operatora B_1 na V_1' je invertibilan operator. Pri tome je $m_1 = \dim V_1$, $V_1 = \mathcal{N}(B_1^{p_1}) = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I)^{p_1}$ i $p_1 = \mathrm{ind}(A - \lambda_1 I) = \mathrm{ind}(B_1)$. Nije teško utvrditi da prethodna dekompozicija kompletno redukuje i operator A. Za operator B_1 postoji prirodna baza C_1 u potprostoru V_1, tako da je

$$[B_1]_{C_1} = \begin{bmatrix} J_{m_1,1}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_1,2}(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_1,t_1}(0) \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$[A|_{V_1}]_{C_1} = \begin{bmatrix} J_{m_1,1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_1,2}(\lambda_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_1,t_1}(\lambda_1) \end{bmatrix}.$$

Ako je A_1 redukcija operatora A na V_1, i ako je A_2 redukcija operatora A na V_1', tada je $P_{A_1}(\lambda) = (-1)^{m_1}(\lambda - \lambda_1)^{m_1}$,

$$P_{A_2}(\lambda) = (-1)^{n-m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_l)^{m_l},$$

$\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ i $\sigma(A_1) \cap \sigma(A_2) = \emptyset$. Sada nastavimo postupak za operator A_2 na prostoru V_1', na isti način kao što smo uradili za operator A na prostoru V. Ovaj postupak se završava u konačno mnogo koraka, i time dokazujemo tvrđenje. $\square$

Sada dokazujemo rezultat u vezi Teroeme 1.2.4

Teorema 1.6.2. *Neka je $A \in L(V)$ i $\dim V = n$. Postoji baza prostora V koja je sastavljena od sopstvenih vektora operatora A, ako i samo ako za svako $\lambda \in \sigma(A)$ važi $\mathrm{rank}(A - \lambda I) = n - m$, pri čemu je $m = \mathrm{alg}(\lambda)$.*

Dokaz. $\Longrightarrow$: Neka postoji baza B prostora V, koja je sastavljena od spostvenih vektora operatora A. Tada je matrica operatora A u toj bazi dijagonalna, odnosno

$$[A]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

pri čemu su na dijagonali sopstvene vrednosti operatora A. Očigledno je za $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$[A - \lambda_I]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{bmatrix}.$$

Važi:

$$P_A(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Neka je $m_1 = \text{alg}(\lambda_1)$. Tada je $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{m_1}$ i $\lambda_1 \neq \lambda_j$ za svako $j > m - 1$. Sledi da dijagonalna matrica $[A - \lambda_1 I]_B$ ima na prvih m dijagonalnih mesta broj 0, a na preostalih $n - m$ dijaginalnih mesta brojeve različite od 0. Dakle, $\text{rank}(A - \lambda_1 I) = n - m$.

$\Longleftarrow$: Posmatramo Žordanovu normalnu formu operatora A. Neka je $P_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_l)^{m_l}$ karakteristični polinom operatora A. Neka je V_1 potprostor koji je konstruisan u vezi sa λ_1. Tada je $\dim V_1 = m_1$. Ako je $\text{rank}(A - \lambda_1 I) = n - m_1$, tada sopstvenoj vrednosti λ_1 odgovara m_1 sopstvenih vektora, svi oni pripadaju prostoru V_1, i stoga čine bazu prostora V_1. Postupak se nastavi za potprostore koji odgovaraju ostalim sopstvenim vrednostima. $\square$

1.7 Projektori

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ i neka je $P \in L(V)$. Operator P je projektor (idempotent, projekcija), ako je $P^2 = P$. Ako je P projektor, onda je $I - P$ takođe projektor. Lako je proveriti da važi $\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P)$, kao i $\mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P)$.

Tvrđenje 1.7.1. *Ako je $P \in L(V)$ projektor, tada je $\sigma(P) \subset \{0,1\}$, pri čemu je 0 jedini projektor čiji je spektar $\{0\}$, i I je jedini projektor čiji je spektar $\{1\}$.*

Takođe je jednostavno proveriti sledeći rezultat.

Tvrđenje 1.7.2. *Postoji dekompozicija $V = V_1 \stackrel{\bullet}{+} V_2$, ako i samo ako postoji projektor $P \in L(V)$, tako da je $\mathcal{R}(P) = V_1$ i $\mathcal{N}(P) = V_2$.*

Dokaz. Ako je P projektor, tada je jednostavno proveriti da važi $V = \mathcal{R}(P) \stackrel{\bullet}{+} \mathcal{N}(P)$.

Sa druge strane, neka je $V = V_1 \stackrel{\bullet}{+} V_2$ dekompozicija prostora V. Ako je $x \in V$, tada postoje jedinstveno određeni $y \in V_1$ i $z \in V_2$, tako da je $x = y + z$. Neka je $P : V \to V$ definisan kao $P(x) = y$. Lako je proveriti da je P dobro definisan linearan operator, koji zadovoljava uslove $\mathcal{R}(P) = V_1$ i $\mathcal{N}(P) = V_2$. $\square$

Ako je P projekcija sa V na potprostor V_1, pri čemu je $\mathcal{N}(P) = V_2$, onda je u upotrebi naziv "P je projekcija na V_1 paralelno sa V_2“. U tom slučaju dekompozicija $V = \mathcal{R}(P) \stackrel{\bullet}{+} \mathcal{N}(P)$ kompletno redukuje P, $P|_{\mathcal{R}(P)} = I$ i $P|_{\mathcal{N}(P)} = 0$.

Dva projektora $P, Q \in L(V)$ su uzajamno singularna, ako je $PQ = QP = 0$. U tom slučaju je oznaka $P \perp Q$.

Ako su P, Q projektori, tada njihov zbir, razlika ili proizvod nisu obavezno projektori.

Teorema 1.7.1. *Neka su P, Q projektori. Tada je $P+Q$ projektor ako i samo ako je $P \perp Q$. U tom slučaju je $\mathcal{R}(P+Q) = \mathcal{R}(P) \stackrel{\bullet}{+} \mathcal{R}(Q)$ i $\mathcal{N}(P+Q) = \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)$.*

Dokaz. $\Longrightarrow$: Neka je $P + Q$ projektor. Tada je $P + Q = (P + Q)^2 = P^2+PQ+QP+Q^2 = P+PQ+QP+Q$, odakle sledi da je $PQ+QP = 0$. Množeći poslednju jednakost operatorom P jednom s leva, drugi put s desna, dobija se da važi $PQ + PQP = 0 = PQP + QP$, odnosno $PQ = QP$. Kako je $PQ + QP = 0$, sledi da je $2PQ = 0$, odnosno $PQ = 0$.

$\Longleftarrow$: Neka je $PQ = QP = 0$. Tada je trivijalno $(P+Q)^2 = P+Q$, odnosno $P + Q$ je projektor.

Na kraju, ako je $P+Q$ projektor, odnosno $PQ = QP = 0$, procenimo sliku i jezgro projektora $P+Q$.

Pretpostavimo da je $x \in \mathcal{N}(P+Q)$, odnosno $Px + Qx = 0$. Množenjem poslednje jednakosti (s leva) projektorom P, uz korišćenje činjenice $PQ = 0$, sledi da je $P^2x = Px = 0$. Dakle, $x \in \mathcal{N}(P)$. Na isti način se dokazuje $x \in \mathcal{N}(Q)$. Sa druge strane, ako je $x \in \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)$, trivijalno sledi da je $x \in \mathcal{N}(P+Q)$. Prema tome, $\mathcal{N}(P+Q) = \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q)$.

Očigledno je $\mathcal{R}(P+Q) \subset \mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q)$. Sa druge strane, iz $PQ = QP = 0$ sledi da je $\mathcal{R}(P) \subset \mathcal{N}(Q)$ i $\mathcal{R}(Q) \subset \mathcal{N}(P)$. Kako je $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(P) = \{0\} = \mathcal{R}(Q) \cap \mathcal{N}(Q)$, sledi da je $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\}$. Neka je $x \in \mathcal{R}(P) \dot{+} \mathcal{R}(Q)$. Tada postoje jedinstveni vektori $y \in \mathcal{R}(P)$ i $z \in \mathcal{R}(Q)$ tako da je $x = y + z$. Sledi da je $(P+Q)x = (P+Q)y + (P+Q)z = Py + Qz = y + z = x$, odnosno $x \in \mathcal{R}(P+Q)$. $\square$

Koristeći prethodini rezultat, razmatramo razliku dva projektora.

Teorema 1.7.2. *Neka su P, Q projektori. Operator $P-Q$ je projektor ako i samo ako je $PQ = QP = Q$. U tom slučaju je $\mathcal{R}(P-Q) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(Q)$ i $\mathcal{N}(P-Q) = \mathcal{N}(P) \dot{+} \mathcal{N}(Q)$.*

Dokaz. Neka su P, Q projektori. Tada je $P - Q$ projektor, ako i samo ako je $I - (P-Q) = (I-P) + Q$ projektor. Prema Teoremi 1.7.1, $(I-P)+Q$ je projektor, ako i samo ako je $(I-P)Q = Q(I-P) = 0$, odnosno ako i samo ako je $PQ = QP = Q$. U tom slučaju je $\mathcal{R}((I-P)+Q) = \mathcal{R}(I-Q) \dot{+} \mathcal{R}(Q) = \mathcal{N}(P) \dot{+} \mathcal{R}(Q)$, kao i $\mathcal{N}((I-P)+Q) = \mathcal{N}(I-P) \cap \mathcal{N}(Q) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{N}(Q)$. $\square$

Sada posmatramo proizvod dva projektora.

Teorema 1.7.3. *Neka su P, Q projektori. Ako je $PQ = QP$, tada je PQ projektor, pri čemu je $\mathcal{R}(PQ) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$ i $\mathcal{N}(PQ) = \mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q)$.*

Dokaz. Ako je $PQ = QP$, tada je $(PQ)^2 = P^2Q^2 = PQ$. Takođe je $\mathcal{R}(PQ) \subset \mathcal{R}(P)$ i $\mathcal{R}(PQ) = \mathcal{R}(QP) \subset \mathcal{R}(Q)$, odnosno $\mathcal{R}(PQ) \subset \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$. Sa druge strane, neka je $x \in \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$, odnosno $x = Py = Qz$ za neke $y, z \in V$. Tada je $PQx = PQQz = PQz = Px = PPy = Py = x$, odnosno $x \in \mathcal{R}(PQ)$.

Važi $\mathcal{N}(P) \subset \mathcal{N}(QP) = \mathcal{N}(PQ)$, kao i $\mathcal{N}(Q) \subset \mathcal{N}(PQ)$, odakle sledi $\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q) \subset \mathcal{N}(PQ)$. Sa druge strane, ako je $x = y + z$, pri čemu je $y \in \mathcal{N}(P)$ i $z \in \mathcal{N}(Q)$, tada je $PQx = PQ(y+z) = QPy + PQz = 0$, odakle sledi $x \in \mathcal{N}(PQ)$, odnosno $\mathcal{N}(P) + \mathcal{N}(Q) \subset \mathcal{N}(PQ)$. $\square$

Ako je P projektor, tada je očigledno ispunjeno $P + (I - P) = I$, kao i $P \perp (I - P)$. Ova situacija se može generalisati na više operatora.

Definicija 1.7.1. Neka su $P_1, \dots, P_k$ projektori koji su međusobno komutativni i uzajamno singularni, odnosno za svako $i \neq j$ važi $P_iP_j = 0 = P_jP_i$. Ako je

$$P_1 + \cdots + P_k = I,$$

onda ova suma predstavlja rezoluciju jedinice.

Teorema 1.7.4. (a) *Ako je $P_1 + \cdots + P_k = I$ rezolucija jedinice, tada je $V = \mathcal{R}(P_1) \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{R}(P_k)$ i $\mathcal{N}(P_i) = \dot{\sum\limits_{j \neq i}} \mathcal{R}(P_j)$.*

(b) *Ako je $V = V_1 \dot{+} \cdots \dot{+} V_k$, i ako je P_i projekcija sa V na V_i paralelno sa $\underset{j \neq i}{\dot{+}} V_j$, tada je $P_1 + \cdots + P_k = I$ rezolucija jedinice.*

Dokaz. (a) Neka je $P_1 + \cdots + P_k = I$ rezolucija jedinice. Odmah sledi da je $V = \mathcal{R}(I) \subset \mathcal{R}(P_1) + \cdots + \mathcal{R}(P_k) = V$. Sa druge strane, iz $P_iP_j = 0$ za $i \neq j$ sledi da je $\mathcal{R}(P_i) \cap \mathcal{R}(P_j) = \{0\}$. Prema tome, $\mathcal{R}(P_1) \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{R}(P_k) = V$. Iz $P_iP_j = 0$ takođe sledi da je $\mathcal{R}(P_j) \subset \mathcal{R}(P_i)$ za svako $j \neq i$. Prema tome, $\underset{j \neq i}{\dot{+}} \mathcal{R}(P_j) \subset \mathcal{N}(P_i)$. Sa druge strane, oba potprostora $\underset{j \neq i}{\dot{+}} \mathcal{R}(P_j)$ i $\mathcal{N}(P_i)$ predstavljaju komplement potprostora $\mathcal{R}(P_i)$ do celog prostora V. Sledi $\underset{j \neq i}{\dot{+}} \mathcal{R}(P_j) = \mathcal{N}(P_i)$.

(b) Jednostavno. $\square$

Neka je $A \in L(V)$ i neka je $P_1 + \cdots + P_k = I$ rezolucija jedinice. Ako postoje $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ tako da je

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k,$$

tada prethodna jednakost predstavlja spektralnu rezoluciju operatora A.

Teorema 1.7.5. *Postoji baza prostora V u kojoj je operator A dijagonalan, ako i samo ako postoji spektralna rezolucija operatora A: $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$, pri čemu je $P_1 + \cdots + P_k = I$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ su međusobno različiti kompleksni borjevi.*

U tom slučaju je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, $\mathcal{R}(P_i) = \mathcal{N}(A - \lambda_i I)$ i $\mathcal{N}(P) = \dot{+}_{j\neq i} \mathcal{N}(A - \lambda_j I)$.

Dokaz. Neka je B baza u kojoj je operator A dijagonalan (odnosno $[A]_B$ je dijagonalna matrica). Tada postoji baza sastavljena od sopstvenih vektora operatora A. Neka je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, pri čemu su sve nabrojane sopstvene vrednosti međusobno različite. Neka su $x_1^1, \ldots, x_{l_1}^1$ lienarno nezavisni sopstveni vektori koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ_1. Uz odgovarajuće oznake, $x_1^j, \ldots, x_{k_j}^j$ su linearno neavisni sopstveni vektori koji odgovaraju sopstvenoj vrednosti λ_j. Važi $\mathcal{N}(A - \lambda_j I) = \mathrm{lin}\{x_1^j, \ldots, x_{k_j}^j\}$, i $V = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{N}(A - \lambda_k I)$. Neka je P_i projektor na $\mathcal{N}(A - \lambda_i I)$ paralelno sa $\dot{+}_{j\neq i} \mathcal{N}(A - \lambda_j I)$. Tada je $P_1 + \cdots + P_k = I$ rezolucija jedinice. Nije teško proveriti da važi $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$, i ovo je spektralna rezolucija operatora A.

Sa druge strane, neka je $P_1 + \cdots + P_k = I$ rezolucija jedinice, i neka je $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$ spektralna rezolucija operatora A. Ako je, recimo, $\lambda_1 = \lambda_2$, lako je proveriti da je $Q_1 = P_1 + P_2$ projektor, $Q_1 + P_3 + \cdots + P_k = I$ je rezolucija jedinice i $A = \lambda_1 Q_1 + \lambda_3 P_3 + \cdots + \lambda_k P_k$ je spektralna rezolucija operatora A. Lako dolazimo do zaključka da bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti $\lambda_i \neq \lambda_j$ za $i \neq j$. Prema ranijem rezultatu, $V = \mathcal{R}(P_1) \dot{+} \cdots \dot{+} \mathcal{R}(P_k)$. Ako je $x \in \mathcal{R}(P_i)$, tada je $Ax = AP_i x = \lambda_i x$, odakle sledi da je $\lambda_i \in \sigma(A)$, kao i $\mathcal{N}(A - \lambda_i I) = \mathcal{R}(P_i)$. Trivijalno sledi da je $\mathcal{N}(P_i) = \dot{+}_{j\neq i} \mathcal{N}(A - \lambda_j I)$. $\square$

Na kraju dokazujemo dva rezultata o invarijantnim potprostorima i projektorima.

Tvrđenje 1.7.3. *Neka je U potprostor od V, i neka je $A \in L(V)$. Potprostor U je invarijantan za A, ako i samo ako je $PAP = AP$ za svaki projektor $P \in L(V)$ za koji je $\mathcal{R}(P) = U$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $AU \subset U$ i da je P projektor na U. Neka je $x \in V$. Tada je $Px \in U$, te je $APx = v \in U$. Stoga je $PAPx = Pv = v = APx$, odnosno $PAP = AP$.

Sa druge strane, pretpostavimo da je P projektor na U sa svojstvom $PAP = AP$. Neka je $x \in U$. Tada je $x = Px$ i $Ax = APx = PAPx \in \mathcal{R}(P) = U$. Dakle, $AU \subset U$. $\square$

Tvrđenje 1.7.4. *Neka je $V = U \dot{+} W$ i $A \in L(V)$. Prethodna dekompozicija kompletno redukuje A, ako i samo ako je $AP = PA$ za projektor P sa svojstvima $\mathcal{R}(P) = U$ i $\mathcal{N}(P) = V$.*

Dokaz. Pretpostavimo da dekompozicija $V = U \dot{+} W$ kompletno redukuje A, odnosno $AU \subset U$ i $AW \subset W$. Neka je P projektor sa svojstvom $\mathcal{R}(P) = U$ i $\mathcal{N}(P) = W$. Tada je $\mathcal{R}(I-P) = W$. Prema prethodnom tvrđenju, sledi da važi $PAP = AP$ i $(I-P)A(I-P) = A(I-P)$. Elementarnim sređivanjem ove dve jednakosti, proizilazi da je $AP = PA$. $\square$

Glava 2

Operatori na unitarnim prostorima

2.1 Linearni funkcionali

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ (ili $\mathbb{R}$). Linearno preslikavanje $f : V \to \mathbb{C}$ (ili $\mathbb{R}$) jeste linearan funkcional. Skup svih linearnih funkcionala na V je vektorski prostor (nad istim poljem), i označava se sa V^*. Jednostavno je proveriti da je V^* vektorski prostor nad istim poljem kao i V, u odnosu na uobičajeno sabiranje i množenje skalarom. Dakle, $V^* = L(V, \mathbb{C})$. Prostor V^* je dualni prostor prostora V.

Ako je $f \in V^*$ i $f \neq 0$, tada je $\mathcal{R}(f) = \mathbb{C}$, odnosno f je surjekcija. Na osnovu $\dim \mathcal{N}(f) + \dim \mathcal{R}(f) = \dim V = n$, sledi da je $\dim \mathcal{N}(f) = n - 1$ ako je $f \neq 0$.

Teorema 2.1.1. (a) *Ako je $x \in V$, $x \neq 0$, tada postoji $f \in V^*$ tako da je $f(x) \neq 0$.*

(b) *Ako je $x \in V$ i $f \in V^*$ tako da je $f(x) \neq 0$, tada je $V = \mathrm{lin}\{x\} \dot{+} \mathcal{N}(f)$.*

(c) *Ako je $f, g \in V^* \setminus \{0\}$, tada je $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(g)$ ako i samo ako su f i g linearno zavisni.*

Dokaz. (a) Neka je $x \in V$ i $x \neq 0$. Postoji potprostor M od V tako da je $V = \mathrm{lin}\{x\} + M$. Ako je $y \in V$, tada postoji jedinstven skalar λ i postoji jedinstven vektor $z \in M$, tako da je $y = \lambda x + z$. Neka je

$f : V \to \mathbb{C}$ definisan kao $f(y) = \lambda$. Lako je proveriti da je $f \in V^*$ i $f(x) = 1$.

(b) Neka je $x \in V$ i $f \in V^*$, tako da je $f(x) \neq 0$. Tada je $\text{lin}\{x\} + \mathcal{N}(f) = \text{lin}\{x\} \dot{+} \mathcal{N}(f)$. Iz činjenice $\dim \mathcal{N}(f) = n-1$, gde je $n = \dim v$, sledi da je $V = \text{lin}\{x\} \dot{+} \mathcal{N}(f)$.

(c) Neka je $f, g \in V^*$, tako da je $f = \lambda g$ za neko $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tada je lako proveriti jednakost $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(g)$. Sa druge strane, pretpostavimo da je $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(g)$. Iz $\dim \mathcal{N}(f) = n - 1$ sledi da postoji $x \in V$ sa svojstvom $\text{lin}\{x\} \dot{+} \mathcal{N}(f) = V$. Tada je $f(x) \neq 0$ i $g(x) \neq 0$. Neka je $\lambda = f(x)/g(f)$. Lako je proveriti da je $f = \lambda g$. $\square$

Neka je $B = (e_1, \ldots, e_n)$ baza vektorskog prostora V. Definišimo $f_i : B \to \mathbb{C}$ na sledeći način: $f_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ Ako je $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$, onda neka je $f_i(x) = \lambda_i$. Lako je proveriti da je $f_i \in V^*$.

Pretpostavimo da postoje skalari $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, tako da je $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$. Tada je $0 = \alpha_i f_i(e_i) = \alpha_i$. Sledi da su funkcionali $f_1, \ldots, f_n$ linearno nezavisni.

Neka je $f \in V^*$. Ako je $x \in V$ proizvoljan, onda je $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$, odakle sledi $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j f(e_j)$. Prema prethodnom, $\lambda_j = f_j(x)$. Neka je $f(e_j) = \beta_j \in \mathbb{C}$, i β_j očigledno ne zavisi od x. Tada je $f(x) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j(x)$. Kako je $x \in V$ proizvoljno, sledi da je $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j f_j$, odnosno $B^* = (f_1, \ldots, f_n)$ je baza prostora V^*.

Sledi da je $\dim(V^*) = \dim(V)$. Baza B^* je dualna bazi B.

Analogno se definiše dualni prostor $(V^*)^* = V^{**}$ prosdtora V^*. Dakle, $V^{**} = L(V^*, \mathbb{C})$. Na osnovu prethodnog, važi $n = \dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$.

Postoji prirodna veza između vektora prostora V i prostora V^*. Definišemo preslikavanje $J : V \to V^{**}$ na sledeći način: neka je $x \in V$ i $f \in V^*$; tada je $J(x)(f) = f(x)$. Tada je $J(x) \in V^{**}$, i J se naziva kanonsko preslikavanje.

Teorema 2.1.2. *Kanonsko preslikavanje $J : V \to V^{**}$ je linearan operator i bijekcija (izomorfizam).*

Dokaz. Lako je proveriti da je J linearno preslikavanje. Pretpostavimo da je $J(x) = 0$. Tada je $f(x) = 0$ za svako $f \in V^*$, odakle sledi $x = 0$. Dakle, $\mathcal{N}(J) = \{0\}$. Time je dokazano da je J injekcija. Na osnovu $\dim V = \dim V^{**}$ sledi da je J bijekcija. $\square$

Prethodna teorema predstavlja refleksivnost konačno dimenzionalnog prostora V.

Neka je $M \subset V$ i $N \subset V^*$. Anulator (anihilator) skupa M definisan je kao $M^\circ = \{f \in X^* : f(m) = 0 \text{ za svako } m \in M\}$. Anulator skupa N definisan je kao ${}^\circ N = \{x \in V : n(x) = 0 \text{ za svako } n \in N\}$. Ako je $M_1 \subset M_2 \subset V$, tada je $M_2^\circ \subset M_1^\circ$. Analogno, ako je $N_1 \subset N_2 \subset V^*$, tada je ${}^\circ N_2 \subset^\circ N_1$.

Tvrđenje 2.1.1. *Neka je $M \subset V$, $N \subset V^*$, i neka su V_1, V_2 potprostori od V.*

(a) *M° je potprostor od V^*, ${}^\circ N$ je potprostor od V.*

(b) *${}^\circ(M^\circ) = \text{lin}\, M$, $({}^\circ N)^\circ = \text{lin}\, N$.*

(c) *$(V_1 \cap V_2)^\circ = V_1^\circ + V_2^\circ$, $(V_1 + V_2)^\circ = V_1^\circ \cap V_2^\circ$.*

Teorema 2.1.3. *Ako je $V = V_1 \stackrel{\bullet}{+} V_2$, tada je $(V_1 \stackrel{\bullet}{+} V_2)^* = V_1^\circ \stackrel{\bullet}{+} V_2^\circ$.*

Neka je $A \in L(V, W)$. Tada se na prirodan način definiše operator $A' : W^* \to V^*$. Ako je $x \in V$ i $f \in W^*$, tada je $A'f \in V^*$ definisan kao $(A'f)(x) = f(Ax)$. Jednostavno je proveriti da je A' dobro definisano linearno preslikavanje iz W^* u V^*. Operator A' je adjungovan operator operatora A.

Tvrđenje 2.1.2. (a) *Ako je $A, B \in L(V, W)$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, tada je $(\lambda A + \mu B)' = \lambda A' + \mu B'$.*

(a) *Ako je $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, Z)$, tada je $(BA)' = A'B'$.*

(c) *Ako je $A \in L(V, W)$ invertibilan, tada je i $A' \in L(W^*, V^*)$ invertibilan, i $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.*

Teorema 2.1.4. *Ako je $A \in L(V, W)$, tada je $\mathcal{N}(A') = \mathcal{R}(A)^\circ$ i $\mathcal{R}(A') = \mathcal{N}(A)^\circ$.*

Posledica 2.1.1. *Ako je $A \in L(V, W)$, tada je* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A')$.

Teorema 2.1.5. *Neka je: B uređena baza prostora V, C je uređena baza prostora W, B^* i C^* su dualne uređene baze prostora V^* i W^* redom. Tada je ${}_{B^*}[A']_{C^*} = \left({}_C[A]_B\right)^\top$.*

2.2 Skalarni proizvod i norma vektora

Definicija 2.2.1. Neka je V kompleksan (realan) vektorski prostor. Funkcija $s : V \times V \to \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) je skalarni proizvod u V, ako zadovoljava sledeće uslove:

(a) $s(x, x) \geq 0$ za svako $x \in V$;
(b) $s(x, x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$;
(c) $s(x, y) = \overline{s(y, x)}$ za svako $x, y \in V$;
(d) $s(\lambda x + \mu y, z) = \lambda s(x, z) + \mu s(y, z)$ za svako $x, y, z \in V$ i svako $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$).

Dakle, s je linearna funkcija po prvom argumentu, i konjugovano linearna funkcija po drugom argumentu. Napominjemo da je standardna definicija u fizici obrnuta: zahteva se antilinearnost po prvom argumentu, i linearnost po drugom argumentu. Neunificiranost definicije skalarnog proizvoda podrazumeva posebnu pozornost kod primena istog u fizici.

Oznaka za $s(x, y)$ biće $\langle x, y\rangle$, a u literaturi se sreće i (x, y).

Ako je V realan vektorski prostor, onda je skalarni proizvod preslikavanje iz $V \times V$ u $\mathbb{R}$, i ima sva pomenuta svojstva. U ovom slučaju je $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, jer konjugovanje nema smisla. Sada je skalarni proizvod linearna funkcija po oba argumenta.

Primer 2.2.1. U vektorskom prostoru $\mathbb{C}^n$ skalarni proizvod je definisan kao $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$, ako je $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Ako je V vektorski prostor sa skalarnim proizvodom, onda je V unitaran prostor.

Definicija 2.2.2. Neka je V kompleksan (realan) vektorski prostor. Funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ je norma u V, ako su ispunjeni uslovi

(a) $\|x\| \geq 0$ za svako $x \in V$;

(b) $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$;
(c) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ za svako $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$ i svako $x \in V$;
(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ za svako $x, y \in V$ (nejednakost trougla).

Dakle, norma uopštava pojam intenziteta geometrijskog vektora.

Tvrđenje 2.2.1. *Ako je $\|\cdot\|$ norma na V, tada za svako $x, y \in V$ važi*

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|.$$

Dokaz. Za $x, y \in V$ važi: $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, odakle sledi $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Analogno se dokazuje $\|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|$. Iz poslednje dve nejednakosti sledi tvrđenje. □

Na jednom vektorskom prostoru se na više načina može zadati norma. Od posebnog interesa jeste norma koja je indukovana skalarnim prozvodom.

Teorema 2.2.1. *Neka je V unitaran prostor sa skalarnim proizvodom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Tada je $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ norma na V, koja zadovoljava uslove:*
(a) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ (*nejednakost Koši-Švarca-Bunjakovskog*);
(b) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + \|y\|^2$ (*jednakost paralelograma*).

Dokaz. Iz činjenice $\langle x, x \rangle \geq 0$ sledi da je $\|x\|$ dobro definisana funkcija. Osobine $\|x\| = 0$ ako i samo ako $x = 0$, kao i $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ za svaki vektor x i svaki broj λ, slede neposredno iz definicije funkcije $\|\cdot\|$. Jednakost paralelograma takođe neposredno sledi iz definicije funkcije $\|\cdot\|$.

Da bi dokazali nejednakost trougla, prvo ćemo dokazati nejednakost Koši-Švarca-Bunjakovskog. Neka je $x, y \in V$ i neka je λ proizvoljan broj. Ako je $\langle x, y \rangle = 0$, tvrđenje je dokazano. U suprotnom, važi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \lambda y\|^2 = \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - \overline{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \Big[\langle y, x \rangle - \overline{\lambda} \langle y, y \rangle \Big]. \end{aligned}$$

Neka je $\overline{\lambda} = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$. Tada je

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|}{\|y\|^2},$$

odakle odmah sledi tražena nejednakost.

Nejednakost trougla dokazujemo na sledeć i način. Za $x, y \in V$ važi

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Na taj način je dokazana teorema. □

Interesantno je napomenuti da se skalarni proizvod može rekonstruisati na osnovu norme. Dokaz naredne teorem sledi na osnovu definicije norme.

Teorema 2.2.2. (*Polarizaciona jednakost*) *Neka je V vektorski prostor sa skalarnim proizvodom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ i odgovarajućom normom $\|\cdot\|$.*

(a) *Ako je V realan vektorski prostor, tada za svako $x, y \in V$ važi*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

(b) *Ako je V kompleksan vektorski prostor, tada za svako $x, y \in V$ važi*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right).$$

Tvrđenje 2.2.2. *Neka je V vektorski prostor sa skalarnim prozivodom $\langle,\cdot,\cdot\rangle$ i odgovarajućom normom $\|\cdot\|$. Tada funkcija $d(x,y) = \|x-y\|$, za svako $x, y \in V$, ima sledeća svojstva:*

(a) *$d(x,y) \ge 0$ za svako $x, y \in V$;*

(b) *$d(x,y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$, za svako $x, y \in V$;*

(c) *$d(x,y) = d(y,x)$ za svako $x, y \in V$;*

(d) *$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$, za svako $x, y, z \in V$ (nejednakost trougla).*

Drugim rečima, d je metrika u vektorskom prostoru V. Veličina $d(x,y)$ je rastojanje između vektora x i y.

Primer 2.2.2. U prostoru $\mathbb{C}^n$ Euklidova norma vektora x definisana je kao

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2}.$$

Euklidovo rastojanje u istom prostoru $\mathbb{C}^n$ definisano je kao

$$d(x,y) = \|x-y\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\right)^{1/2}.$$

Potpuno analogna situacija je u prostoru $\mathbb{R}^n$.

Neka je $(x_n)_n$ niz tačaka unitarnog prostora V, i neka je $x \in V$. Niz tačaka $(x_n)_n$ konvergira ka x u smislu norme, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

2.3 Ortogonalna baza i dekompozicija prostora

Nadalje je V unitaran vektorski prostor sa odgovarajućim skalarnim proizvodom i normom. Vektori $x, y \in V$ su uzajamno ortogonalni, u oznaci $x \perp y$, ako je $\langle x, y\rangle = 0$.

Definicija 2.3.1. Sistem vektora $\{e_1, \dots, e\}$ je ortogonalan, ako je $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ za svako $i \neq j$, kao i $\langle e_i, e_i\rangle \neq 0$.

Prethodni sistem je ortonormiran, ako je ortogonalan i ako je $\|e_i\| = 1$ za svako $i = 1, \dots, k$.

Tvrđenje 2.3.1. *Svaki ortogonalan sistem vektora je linearno nezavisan.*

Dokaz. Neka je $\{e_1, \dots, e_k\}$ ortogonalan sistem vektora, i neka postoje brojevi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, tako da je

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k = 0.$$

Tada je

$$0 = \langle 0, e_i\rangle = \langle \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k, e_i\rangle = \lambda_i \|e_i\|^2,$$

odakle sledi $\lambda_i = 0$ za svako $i = 1, \dots, k$. □

Definicija 2.3.2. Ako je $B = (e_1, \dots, e_n)$ baza unitarnog prostora V, pri čemu je $\{e_1, \dots, e_n\}$ ortogonalan (ortonormiran) sistem vektora, tada je B ortogonalna (ortonormirana) baza prostora V.

Ukoliko je data proizvoljna baza, tada se Gram-Šmitovim postupkom ortogonalizacije dolazi do ortogonalne, ili ortonormirane baze prostora V. Pri tome treba voditi računa da sve baze jednog vektroskog prostora imaju isti broj elemenata.

Neka je $B = (f_1, \dots, f_n)$ proizvoljna baza prostora V. Primenimo sledeći algoritam:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{f_1}{\|f_1\|}, \\
e_2' &= f_2 - \langle f_2, e_1 \rangle e_1, \quad e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|}, \\
&\vdots \\
e_k' &= f_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle f_k, e_j \rangle e_j, \quad e_k = \frac{e_k'}{\|e_k'\|}, \\
&\vdots \\
e_n' &= f_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle f_n, e_j \rangle e_j, \quad e_n = \frac{e_n'}{\|e_n k'\|}.
\end{aligned}$$

Lako je proveriti da je $B_1' = (e_1, e_2', \dots, e_n')$ ortogonalna baza, dok je $B_1 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ ortonormirana baza prostora V.

Posledica 2.3.1. *Za svaki unitaran prostor V postoji ortogonalana (ortonormirana baza).*

Neka je $B = (e_1, \dots, e_n)$ ortogonalna baza prostora V i neka je $x \in V$. Tada je

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n,$$

za neke brojeve $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Tada je

$$\langle x, e_j \rangle = \lambda_j \|e_j\|^2,$$

odakle sledi $\lambda_j = \frac{\langle x, e_j \rangle}{\|e_j\|^2}$. Dakle,

$$x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle x, e_j \rangle}{\|e_j\|^2} e_j, \tag{2.1}$$

i ova reprezentacija vektora x naziva se Furijeova reprezentacija od x u odnosu na B.

Ako je B ortonormirana baza, onda je Furijeova formula još jednostavnija:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \, e_j.$$

Uzajamnu ortogonalnost dva vektora jednostavno je produžiti na uzajamnu ortogonalnost skupova. Ako je $M \subset V$, onda je

$$M^{\perp} = \{y \in V : y \perp x \ \text{ za svako } x \in M\}.$$

Takođe je $(M^{\perp})^{\perp} = M^{\perp\perp}$.

Tvrđenje 2.3.2. (a) *Ako je $M \subset V$, tada je $M^{\perp}$ potprostor od V i $M \subset M^{\perp\perp}$.*

(b) *Ako je M potprostor od V, tada je $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ i $M = M^{\perp\perp}$.*

Dokaz. Tvrđenje (a) sledi jednostavno. Takođe nije teško proveriti da je $M \cap M^{\perp} = \{0\}$. Pretpostavimo da je $M \neq M^{\perp\perp}$. Uvek je $M \subset M^{\perp\perp}$. Neka je B_1 ortogonalna baza potprostora M. Tada postoji vektor $v \in M^{\perp\perp}$ koji je ortogonalan na sve vektore iz B. Sledi da je $v \in M^{\perp} \cap M^{\perp\perp}$, što je prema delu (a) nemoguće. Dakle, $M = M^{\perp\perp}$. $\square$

Ako su M_1 i M_2 podskupovi od V sa svojstvom $m_1 \perp m_2$ za svako $m_1 \in M_1$ i svako $m_2 \in M_2$, tada su podskupovi M_1 i M_2 uzajamno ortogonalni, u oznaci $M_1 \perp M_2$.

Ako su V_1 i V_2 potprostori od V, pri čemu je $V = V_1 \dot{+} V_2$ i $V_1 \perp V_2$, tada je V ortogonalna suma potprostora V_1 i V_2, u oznaci $V = V_1 \oplus V_2$.

Sada formulišemo i dokazujemo važan rezultat o ortogonalnoj dekompoziciji prostora V.

Teorema 2.3.1. *Neka je V unitaran prostor i neka je M potprostor od V. Tada je $V = M \oplus M^{\perp}$.*

Dokaz. Na osnovu ranijih rezultata važi $M + M^{\perp} = M \dot{+} M^{\perp} = M \oplus M^{\perp} \subset V$. Treba dokazati da je $V \subset M \oplus M^{\perp}$. Neka je $x \in v$ i neka je $B_1 = (e_1, \ldots, e_k)$ ortonormirana baza potprostora M. Posmatrajmo vektor

$$u = \langle x, e_1 \rangle \, e_1 + \cdots + \langle x, e_k \rangle \, e_k \in M.$$

Ako je $v = x - u$, tada je $\langle v, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \langle u, e_i \rangle = 0$, odakle sledi da je $v \perp M$, odnosno $v \in M^\perp$. Dakle, $x = u + v$, pri čemu je $u \in M$ i $v \in M^\perp$. $\square$

Teorema 2.3.2. *Neka je $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ortogonalan sistem vektora. Tada važi Pitagorina teorema*

$$\|x_1 + \cdots + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_k\|^2.$$

Dokaz. Na osnovu veze između norme i skalarnog proizvoda, važi:

$$\begin{aligned} \|x_1 + \cdots + x_n\|^2 &= \langle x_1 + \cdots + x_k, x_1 + \cdots + x_k \rangle \\ &= \langle x_1, x_1 \rangle + \cdots + \langle x_k, x_k \rangle \\ &= \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_k\|^2. \end{aligned}$$

$\square$

Teorema 2.3.3. *Neka je $\{e_1, \ldots, e_k\}$ ortonormiran sistem vektora, $x \in V$ i $y = \langle x, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle x, e_k \rangle e_k$. Tada važi nejednakost Besela*

$$\|y\| \leq \|x\|.$$

Dokaz. Neka je $M = \text{lin}\{e_1, \ldots, e_k\}$. Tada je $V = M \oplus M^\perp$ i $x = x_1 + x_2$, pri čemu je $x_1 \in M$ i $x_2 \in M^\perp$. Važi

$$y = \sum_{j=1}^{k} \langle x, e_j \rangle e_j = \sum_{j=1}^{k} \langle x_1, e_j \rangle e_j = x_1.$$

Primena Pitagorine teoreme na x dovodi do nejednakosti $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|y\|^2$. $\square$

2.4 Konjugovani operator

Neka je V unitaran prostor, $x \in v$ i $f : V \to \mathbb{C}$ preslikavanje definisano kao $f(y) = \langle y, x \rangle$ za svako $y \in V$. Tada je $f \in V^*$, odnosno f je linearan funkcional na V. Risova teorema o reprezentaciji tvrdi da je svaki linearan funkcional na V reprezentovan preko skalarnog proizvoda.

Teorema 2.4.1. *Neka je V unitaran prostor. Tada $f \in V^*$ ako i samo ako postoji jedinstven vektor $x \in V$ tako da za svako $y \in V$ važi $f(y) = \langle y, x \rangle$.*

Dokaz. Neka je $f \in V^*$. Ako je $f = 0$, onda se može uzeti $x = 0$. Pretpostavimo da je $f \neq 0$. Ako je $\dim V = n$, onda je $\dim \mathcal{N}(f) = n-1$. Postoji vektor $z \in \mathcal{N}(f)^\perp$ tako da je $V = \mathrm{lin}\{z\} \oplus \mathcal{N}(f)$. Neka je $x = \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z$. Za svako $y \in V$ postoje jedinstveni vektori $y_1 = \lambda z \in \mathrm{lin}\{z\}$ i $y_2 \in \mathcal{N}(f)$, tako da je $y = y_1 + y_2$. Tada je $f(y) = \lambda f(z)$. Sa druge strane, važi $\langle y, x \rangle = \left\langle \lambda z, \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z \right\rangle = \lambda f(z)$. Dakle, $f(y) = \langle y, x \rangle$.

Pretpostavimo da postoji vektor $x_1 \in V$, tako da za svako $y \in V$ važi $f(y) = \langle y, x \rangle = \langle y, x_1 \rangle$. Tada je $\langle y, x - x_1 \rangle = 0$ za svako $y \in V$, odakle sledi $x = x_1$. $\square$

Dokazujemo rezultat o egzistenciji i jedinstvenosti konjugovanog operatora.

Teorema 2.4.2. *Neka su V, W unitarni prostori i $A \in L(V, W)$. Postoji jedinstven operator $B \in L(W, V)$, tako da za svako $x \in V$ i $y \in W$ važi $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$. Operator B se označava sa A^* i naziva se (Hilbert) konjugovani operator od A.*

Dokaz. Neka je $y \in W$. Definišimo preslikavanje $T_y : V \to \mathbb{C}$ na sledeći način: $T_y(x) = \langle Ax, y \rangle$ za svako $x \in V$. Tada je $T_y \in V^*$. Na osnovu Risove teoreme o reprezentaciji funkcionala, sledi da postoji jedinstven vektor $v \in V$, tako da za svako $x \in V$ važi $T_y(x) = \langle x, v \rangle$, odnosno za svako $x \in V$ važi $\langle x, v \rangle = \langle Ax, y \rangle$. Neka je $B : W \to V$ definisan kao $By = x$. Prema prethodnom razmatranju, B je dobro definisano preslikavanje. Za preslikavanje B očigeldno važi $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$ za svako $x \in V$ i svako $y \in W$. Dokazujemo jedinstvenost. Pretpostavimo da postoji operator $C \in W, V)$ tako da za svako $x \in V$ i svako $y \in W$ važi $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Cy \rangle$. Tada za svako $x \in V$ i svako $y \in W$ važi $\langle x, By \rangle = \langle x, Cy \rangle$, odnosno $\langle x, (B - C)y \rangle = 0$. Sledi da je $B = C$.

Dokazujemo linearnost operatora B. Neka je $x \in V$, $y, z \in W$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Tada je

$$\begin{aligned} \langle x, B(\lambda y + \mu z) \rangle &= \langle Ax, \lambda y + \mu z \rangle \\ &= \overline{\lambda} \langle Ax, y \rangle + \overline{\mu} \langle Ax, z \rangle \\ &= \langle x, \lambda By + \mu Bz \rangle . \end{aligned}$$

Prethodni identitet važi za svako $x \in V$, te sledi da je $B(\lambda y + \mu z) = \lambda By + \mu Bz$ za svako $y, z \in W$ i svako $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Dakle, B je linearan operator. $\square$

Korisno je napisati identitet koji zadovoljavaju operatori $A \in L(V, W)$ i $A^* \in L(W, V)$:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle\,, \quad \text{za svako } x \in V \text{ i svako } y \in W.$$

Formulišemo važan rezultat o osobinama konjugovanog operatora. Dokaz se ostavlja čitaocu kao jednostavna vežba.

Tvrđenje 2.4.1. *Neka su U, V, W unitarni prostori, $A, B \in L(V)$, $C, D \in L(V, W)$, $E \in L(U, V)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$. Tada važi:*
(a) $(C + D)^* = B^* + C^*$;
(b) $(\lambda C)^* = \overline{\lambda} C^*$;
(c) $C^{**} = C$;
(d) $(AB)^* = B^* A^*$;
(e) $I^* = I$, $0^* = 0*$;
(f) *ako je C invertibilan, onda je C^* invertibilan i važi $(C^{-1})^* = (C^*)^{-1}$.*

Neka je $B = (e_1, \ldots, e_n)$ ortonormirana baza prostora V i neka je $C = (f_1, \ldots, f_m)$ ortonormirana baza prostora W. Ako je $A \in L(V, W)$ i ako je ${}_C[A]_B = [a_{ij}]_{m \times n}$ odgovarajuća matrica operatora A, tada je ${}_B[A^*]_C = [\overline{a_{ji}}]_{n \times m} = ({}_C[A]_B)^\top$.

Teorema 2.4.3. *Neka je $A \in L(V, W)$. Tada važi:*
(a) $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\top$;
(b) $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\top$;
(c) $\mathcal{N}(A^*A) = \mathcal{N}(A)$;
(d) $\mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A)$.

Dokaz. (a) Neka je $x \in W$ proizvoljno. Tada je:

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{N}(A^*) &\iff \langle A^*x, y \rangle = 0 \text{ za svako } y \in W \\ &\iff \langle x, Ay \rangle = 0 \text{ za svako } y \in W \\ &\iff x \perp \mathcal{R}(A). \end{aligned}$$

(b) U jednakosti (a) umesto operatora A posmatrati operator A^*.

(c) Inkluzija $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(A^*A)$ je očigledna. Pretpostavimo da je $x \in \mathcal{N}(A^*A)$. Tada je $Ax \in \mathcal{N}(A^*)$, a na osnovu (a) sledi da je $Ax \perp \mathcal{N}(A^*)$. Dakle, $Ax = 0$.

(d) Na osnovu (a) i (b) važi $W = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*)$ i $V = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^*)$, te je $\mathcal{R}(A) = A(\mathcal{R}(A^*))$.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(A^*A) &= A^*(A(\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^*)) = A^*(A(\mathcal{R}(A^*)) = A^*(\mathcal{R}(A)) \\ &= A^*(\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*)) = \mathcal{R}(A^*). \end{aligned}$$

□

2.5 Normalni operatori

Operator $A \in L(V)$ se može dijagonalizovati, ako postoji baza B prostora V, tako da je $[A]_B$ dijagonalna matrica. Na dijagonali ove matrice se u tom slučaju nalaze sopstvene vrednosti operatora A. Operator A se može unitarno dijagonalizovati, ako postoji ortonormirana baza O prostora V, tako da je $[A]_O$ dijagonalna matrica.

Pretpostavimo da se operator A može unitarno dijagonalizovati. Neka je O odgovarajuća ortonormirana baza i neka je

$$[A]_O = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

pri čemu je $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Tada je

$$[A]_O^* = [A^*]_O = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}$$

i $AA^* = A^*A$. Dokazaćemo kasnije da poslednja jednakost predstavlja ključnu činjenicu za operatore koji se mogu unitarno dijagonalizovati. Takođe je $A = A^*$ ako i samo ako je $\lambda_i \in \mathcal{R}$ za svako $i = 1, \ldots, n$. Dokazaćemo da je i ova činjenica fundamentalna.

Definicija 2.5.1. Operator $A \in L(V)$ je:
(a) normalan, ako je $AA^* = A^*A$;
(b) samokonjugovan (ermitski), ako je $A = A^*$;
(c) unitaran, ako je $AA^* = A^*A = I$.

Označimo sa $N(V)$, $H(V)$ i $U(V)$, redom, skup svih normalnih, samokonjugovanih i unitarnih operatora iz $L(V)$. Tada je $H(V), U(V) \subset N(V)$.

Teorema 2.5.1. *Neka je $A, B \in N(V)$ i $\lambda, \mu \in H(V)$. Tada je*
(a) $\lambda A + \mu B \in N(V)$;
(b) *ako je $A^*B = BA^*$, tada je $AB \in N(V)$;*
(c) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$.
(d) $\mathrm{ind}(A) \leq 1$.
(e) *Ako je A invertibilan, tada je $A^{-1} \in N(V)$.*

Dokaz. (a) i (b) sledi na osnovu jednostavne provere.
(c) Za $s \in V$ važi:

$$x \in \mathcal{N}(A) \iff \langle Ax, Ax \rangle = 0 \iff \langle A^*Ax, x \rangle = 0 \iff \langle AA^*x, x \rangle = 0$$
$$\iff \langle A^*x, A^*x \rangle = 0 \iff x \in \mathcal{N}(A^*).$$

Dakle, $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$. Razmatranjem ortogonalnih komplemenata u poslednjem identitetu proizilazi da je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$.
(d) Na osnovu (c) sledi da važi

$$\mathcal{R}(A) = A(V) = A(\mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A)) = A(\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A)) = \mathcal{R}(A^2).$$

Dakle, $\mathrm{ind}(A) \leq 1$. □

Definicija 2.5.2. Operator $A \in Ł(V)$ je EP, ako je $\mathrm{ind}(A) \leq 1$.

Na osnovu prethodne teoreme sledi da svaki normalan operator jeste EP. Za EP operatore važi:

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^2) = \cdots = \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}((A^*)^2) = \cdots,$$

kao i

$$\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^2) = \cdots = \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}((A^*)^2) = \cdots,$$

odakle sledi naziv ovih operatora na engleskom jeziku: *equal power*.

Teorema 2.5.2. *Neka je $A \in N(V)$.*
(a) *Ako je $Ax = \lambda x$ za neko $\lambda \in \mathbb{C}$ i neko $x \in V$, tada je $A^*x = \overline{\lambda}x$.*
(b) *Ako je $Ax = \lambda x$ i $Ay = \mu y$, pri čemu je $\lambda \neq \mu$, $x, y \neq 0$, tada je $x \perp y$. Specijalno, $\mathcal{N}(A - \lambda I) \perp \mathcal{N}(B - \lambda I)$.*

Dokaz. (a) Neka je $Ax = \lambda x$. Tada je

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (A-\lambda I)x, (A-\lambda I)x\rangle = \langle (A-\lambda I)^*(A-\lambda I)x, x\rangle \\ &= \langle (A-\lambda I)(A-\lambda I)^*x, x\rangle = \langle (A-\lambda I)^*x, (-\lambda I)^*x\rangle , \end{aligned}$$

odakle sledi $A^*x = \overline{\lambda}x$.

(b) Važi

$$\lambda \langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle x, \overline{\mu}y\rangle = \mu \langle x, y\rangle .$$

Kako je $\lambda \neq \mu$, mora biti $x \perp y$. □

Tvrđenje 2.5.1. *Neka je $A \in N(V)$ i neka je U potprostor od V koji je invarijantan za A i A^*. Tada je redukcija $A_1 = A|_U : U \to U$ normalan operator.*

Dokaz. Potprostor U je invarijantan za A i A^*, pa je invarijantan i za operator AA^*. Takođe je $(AA^*)|_U = A|_U A^*|_U$. Lako je proveriti $A|_A^*|U = A^*|UA|U$, kao i $A^*|U = A|_U^*$, odakle sledi traženi rezultat. □

Teorema 2.5.3. *Neka je $A, B \in H(V)$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je:*

(a) *$A + B \in H(V)$;*

(b) *$\lambda A \in H(V)$;*

(c) *$AB \in H(V)$ ako i samo ako $AB = BA$;*

(d) *ako je A invertibilan, onda je $A^{-1} \in H(V)$.*

Dokaz. (c) Neka je $A, B \in H(V)$ i $AB = BA$. Tada je $B^*A^* = A^*B^*$ i važi

$$(AB)^* = B^*A^* = A^*B^* = AB,$$

odakle sledi $AB \in H(V)$.

Sa druge strane, neka je $A, B, AB \in H(V)$. Tada je

$$AB = (AB)^* = B^*A^* = BA.$$

□

Teorema 2.5.4. *Neka je $A \in L(V)$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(a) *$A \in H(V)$;*

(b) *$\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ za svako $x \in V$;*

Dokaz. (a) $\Longrightarrow$ (b): Neka je $A \in H(V)$ i $x \in V$. Tada je

$$\overline{\langle x, Ax\rangle} = \langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*x\rangle = \langle x, Ax\rangle\,,$$

odakle sledi $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Neka je $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ za svako $x \in V$. Tada za svako $x \in V$ važi

$$\langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, A^*, x\rangle\,,$$

te je $\langle x, (A - A^*)x\rangle = 0$. Sledi da je $A = A^*$. □

Teorema 2.5.5. *Ako je $A \in H(V)$, tada je $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Dokaz. Neka je $\lambda \in \sigma(A)$ i $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Tada je

$$\lambda\,\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\,\langle x, x\rangle\,,$$

odakle sledi $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Jednostavno je proveriti sledeći rezultat.

Tvrđenje 2.5.2. *Neka je $A \in L(V)$. Tada je AA^*, $\frac{1}{2}(A + A^*)$, $\frac{1}{2i}(A - A^*) \in H(V)$. Takođe je $\langle AA^*x, x\rangle \geq 0$ za svako $x \in V$.*

Definicija 2.5.3. Operator $\mathrm{Re}(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$ se naziva realni deo operatora A, dok je $\mathrm{Im}(A) = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ imaginarni deo operatora A.

Naravno, $A = \mathrm{Re}\, A + i\,\mathrm{Im}\, A$.

Tvrđenje 2.5.3. *Za svako $A \in L(V)$ operatori* $\mathrm{Re}\, A$ *i* $\mathrm{Im}\, A$ *su jedinstveni operatori iz $H(V)$ tako da je $A = \mathrm{Re}\, A + i\,\mathrm{Im}\, A$.*

*Dokaz.*Neka je $A = A_1 + iB_1 = A_2 + iB_2$, za neke operatore $A_1, A_2, B_1, B_2 \in H(V)$. Tada je $A_1 - A_2 = i(B_2 - B_1)$. Posmatranjem konjugovanih operatora u poslednjoj jednakosti, sledi da je $A_1 = A_2$ i $B_1 = B_2$. □

Definicija 2.5.4. Neka je $A \in H(V)$. Operator A je pozitivan, ako je $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ za svako $x \in V$.

Ako je $A \in L(V)$, tada je AA^* pozitivan operator.

Ako su $X, Y \in L(V)$ proizvoljni operatori, operator $[X, Y] = XY - YX$ se naziva komutator operatora X i Y. Sledeći rezultat se dokazuje direktnom proverom.

Tvrđenje 2.5.4. (a) *Operator $A \in L(V)$ je normalan, ako i samo* $[\operatorname{Re} A, \operatorname{Im} A] = 0$.

(b) *Operator $A \in L(V)$ je normalan, ako i samo ako za svako $x \in V$ važi $\|Ax\| = \|A^*x\|$.*

Definicija 2.5.5. Operator $A \in L(V)$ je izometrija, ako je $\|Ax\| = \|x\|$ za svako $x \in V$.

Tvrđenje 2.5.5. *Neka je $A \in L(V)$ unitaran operator. Tada je $\|Ax\| = \|x\|$ za svako $x \in V$. Ako je A invertibilan operator, tada je A^{-1} takođe unitaran i izometrija.*

Dokaz. Neka je A unitaran i $x \in V$. Tada je

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \|x\|^2.$$

□

Tvrđenje 2.5.6. *Ako su $A, B \in L(V)$ unitarni operatori, tada je UV unitaran operator.*

Dokaz. Neka su A, B unitarni operatori. Tada je $(AB)^*AB = B^*A^*AB = B^*IB = I$. Analogno se dokazuje $AB(AB)^* = I$, odakle sledi da je AB unitaran operator. □

Teorema 2.5.6. *Ako je U matrica prelaza sa ortonormirane baze B_1 na ortonormiranu bazu B_2, tada je U unitarna matrica.*

Tvrđenje 2.5.7. *Ako je A unitaran operator i $\lambda \in \sigma(A)$, onda je $|\lambda| = 1$.*

Dokaz. Neka je A unitaran i $Ax = \lambda x$, pri čemu je $x \neq 0$. Tada je $A^*x = \overline{\lambda}x$, i stoga važi $x = A^*Ax = \lambda A^*x = \lambda\overline{\lambda}x$, odakle sledi $|\lambda| = 1$. □

Za potprostor M, njegov ortogonalni komplement $M^\perp$ je jedinstveno određen. Stoga je dekompozicija $V = M \oplus M^\perp$ jedinstvena za svaki potprostor M od V. Neka je $V = M \oplus M^\perp$. Projektor P sa V na M paralelno sa $M^\perp$, naziva se ortogonalan projektor na potprostor M. Na osnovu prethodno rečenog, ortogonalan projektor na potprostor M je uvek jedinstven.

Teorema 2.5.7. *Neka je $V = M \oplus M^\perp$, P je ortogonalan projektor na M i $x \in V$. Tada važi*

$$\|x - Px\| = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Dokaz. Ako je $x \in V$ i $y \in V$, onda je $Px \in M$, $(I-P)x = x-Px \in M^\perp$ i $Px - y \in M$. Na osnovu Pitagorine teoreme sledi da važi

$$\|x-y\|^2 = \|x - Px + Px - y\|^2 = \|x - Px\|^2 + \|Px - y\|^2.$$

Sledi da desna strana ima najmanju vrednost po y ako je $y = Px$. □

Teorema 2.5.8. *Neka je $P \in L(V)$ projektor. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:*
(a) *P je ortogonalan projektor;*
(b) *P je pozitivan operator;*
(c) *P je ermitski operator;*
(d) *P je normalan operator;*

Dokaz. (a) $\Longrightarrow$ (b): Neka je P ortogonalni projektor. Tada je $V = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$. Ako je $x \in V$, tada je $x = x_1 + x_2$, pri čemu je $x_1 \in \mathcal{R}(P)$ i $x_2 \in \mathcal{N}(P)$. Važi $\langle Px, x\rangle = \langle x_1, x_1 + x_2\rangle = \|x_1\|^2 \geq 0$, te je P pozitivan operator.

(b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d): Očigledno.

(d) $\Longrightarrow$ (a): Ako je P projekor i normalan operator, tada je $V = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$, prema ranijem rezultatu. Dakle, P je ortogonalan projektor. □

Definicija 2.5.6. Operator $A \in L(V)$ je parcijalna izometrija, ako je $\|Ax\| = \|x\|$ za svako $x \in \mathcal{N}(A)^\perp$.

Svaka izometrija je takođe i parcijalna izometrija.

Teorema 2.5.9. *Ako je $A \in L(V, W)$ parcijalna izometrija, onda je AA^* ortogonalan projektor na $\mathcal{R}(A)$, i A^*A je ortogonalan projektor na $\mathcal{R}(A^*)$.*

Teorema 2.5.10. *Neka je $A \in L(V, W)$. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*
(a) *V je parcijalna izometrija;*
(b) *A^* je parcijalna izometrija;*

(c) AA^* *je ortogonalan projektor;*
(d) A^*A *je ortogonalan projektor;*
(e) $AA^*A = A$*;*
(f) $A^*AA^* = A^*$.

2.6 Spektralna svojstva normalnih operatora

Familija operatora $\mathcal{F} = \{A\}$ iz $L(V)$ je Abelova familija, ako svaka dva operatora iz te familije komutiraju (u smislu množenja operatora).

Teorema 2.6.1. *Neka je $\mathcal{F}$ Abelova familija operatora iz $L(V)$. Postoji vektor $e \in V$, $e \neq 0$, tako da za svako $A \in \mathcal{F}$ postoji $\lambda_A \in \mathbb{C}$ tako da je $Ae = \lambda_A e$.*

Dokaz. Ako bi svaki operator $A \in \mathcal{F}$ bio skalarni umnožak identičkog operatora, odnosno ako za svkao $A \in \mathcal{F}$ postoji $\lambda \in \mathbb{C}$ tako da je $A = \lambda_A I$, onda bi tvrđenje bilo dokazano. Naime, svaki ne-nula vektor $e \in V$ zadovoljavao tražene uslove.

Dokazaćemo da u opštem slučaju postoji netrivijalan potprostor U od V, tako da redukcija svakog operatora $A \in \mathcal{F}$ na U jeste skalarni umnožak identičkog operatora. Neka je $A_1 \in \mathcal{F}$ operator koji nije skalarni umnožak identičkog operatora. Postoji netrivijalni invarijantan potprostor X_1 operatora A, tako da je redukcija $A_1 = A|_{X_1} : X_1 \to X_1$ skalarni umnožak operatora I_{X_1}. Takođe je $1 \leq \dim X_1 \leq n-1$. Ako je $B \in F$ proizvoljan operator, tada je X_1 takođe invarijantan za B. Dakle, postoji redukcija $B_1 = B|_{X_1} : X_1 \to X_1$. Dakle, familija svih redukcija operatora iz $\mathcal{F}$ na potprostor X_1 postoji, i to je Abelova familija operatora na X_1, koju označavamo sa $\mathcal{F}_1$.

Ako je svaki operator iz $\mathcal{F}_1$ skalarni umnožak identičkog operatora I_{X_1}, tvrđenje je dokazano. Ako to nije sličaj, neka je $C \in \mathcal{F}_1$ operator koji nije skalarni umnožak identičkog operatora. Postoji netrivijalni invarijantni potprostor X_2, tako da je redukcija $C_2 = C|_{X_2} : X_2 \to X_2$ skalarni umnožak operatora I_{X_2}. Tada posmatramo familiju $\mathcal{F}_2$ redukcije svih operatora iz $\mathcal{F}_1$ na potprostor X_2.

Postupak se uvek može nastaviti, jer postojanje netrivijalnih invarijantih potprostora jeste posledica postojanja sopstvenih vrednosti operatora. Takođe, postupak se uvek završava: ako je $X_k = \mathrm{lin}\{e\}$ u jednom trenutku, tada je e traženi vektor. $\square$

Teorema 2.6.2. *Neka je $\mathcal{F} = \{A\}$ Abelova familija normalnih operatora na V. Tada postoji ortonormirana baza $B = (e_1, \dots, e_n)$ prostora V, tako da je svaki vektor ove baza sopstveni vektor svakog operatora $A \in \mathcal{F}$. Specijalno, matrica svakog operatora $A \in \mathcal{F}$ u bazi B je dijagonalna.*

Dokaz. Prema prethodnoj teoremi, postoji jedinični vektor $e_1 \in V$, tako da za svako $A \in \mathcal{F}$ postoji $\lambda_A^1 \in \mathbb{C}$, sa svojstvom $Ae_1 = \lambda_A^1 e_1$. Takođe je $A^* e_1 = \overline{\lambda_A^1} e_1$. Sledi da je potprostor $\mathrm{lin}\{e_1\}$ invarijantan za A i A^*. Sledi da je $\mathrm{lin}\{e_1\}$ invarijantan za B i B^* svako $A \in F$. Neka je $X_1 = \mathrm{lin}\{e_1\}^\perp$. Tada je X_1 takođe invarijantan za B i B^* za svako $B \in \mathcal{F}$. Označimo sa $\mathcal{F}_1$ redukciju svih operatora iz $\mathcal{F}$ na potprostor X_1. Tada je $\mathcal{F}_1$ Abelova familija normalnih operatora na X_1. Nastavljajući dalje postupak, u konačno mnogo koraka dobijamo traženi rezultat. $\square$

Posledica 2.6.1. *Ako je A normalan operator na V, onda postoji ortonormirana baza b prostora V, tako da je $[A]_B$ dijagonalna matrica.*

Posledica 2.6.2. *Ako je $[A]$ normalna matrica, onda postoji unitarna matrica $[U]$, tako da je $[U]^*[A][U]$ dijagonalna matrica.*

Posledica 2.6.3. *Spektar ermitskog operatora je posdkup od $\mathbb{R}$.*

Definicija 2.6.1. Operatori $A, B \in L(V)$ su unitarno ekvivalentni, ako postoji unitaran operator U, tako da je $A = U^* BU$.

Teorema 2.6.3. *Normalni operatori $A, B \in L(V)$ su unitarno ekvivalenti, ako i samo ako je $P_A = P_B$.*

Dokaz. Ako je $A =' U^* BU$, pri čemu je U unitaran operator, onda je $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$, te je $P_A = P_B$.

Obrnuto, neka je $P_A = P_B$. Neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ različite sopstvene vrednosti operatora A, pri čemu su odgovarajuće algebarske višestrukosti jednake $k_1, \dots, k_m$. Neka je $B_1 = (e_1, \dots, e_n)$ ortonormirana baza u V, tako da je $[A]_{B_1}$ dijagonalna matrica: ova matrica po dijagonali ima vrednost λ_i na tačno k_i mesta ($i = 1, \dots, m$). Neka je $B_2 = (f_1, \ldots, f_m)$ ortonormirana baza u kojoj $[B]_{B_2}$ jeste dijagonalna matrica. Lako je preurediti ove baze, tako da je $[A]_{B_1} = [B]_{B_1}$. Neka je $U : V \to V$ linearan operator definisan kao $Ue_k = f_k$. Operator U je unitaran jer povezuje dve ortonormirane baze. Takođe, $U^*BUe_k = \lambda_k e_k = Ae_k$ za svako k, te je $A = U^*BU$. $\square$

Posledica 2.6.4. *Ako je $A \in L(V)$ normalan operator i $\lambda \in \sigma(A)$, tada je* $\mathrm{alg}(\lambda) = \mathrm{geom}(\lambda)$.

Definicija 2.6.2. Familija projektora $P_1, \ldots, P_m$ je ortogonalna dekompozicija jedinice, ako je
(a) $P_k^* = P_k \neq 0$ za svako k;
(b) $P_i P_j = 0$ za $i \neq j$;
(c) $I = \sum_{k=1}^m P_k$.

Ako je $\lambda_k, \mu_k \in \mathbb{C}$, $A = \sum\limits_{k=1}^m \lambda_k P_k$ i $B = \sum\limits_{k=1}^m \mu_k P_k$, tada je lako proveriti da važi $AB = BA = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k \mu_k P_k$. Takođe je $A^* = \sum\limits_{k=1}^m \overline{\lambda_k} P_k$, te je $AA^* = A^*A$, odnosno A je normalan operator. Lako je proveriti da je A ermitski operator ako i samo ako je $\lambda_k \in \mathbb{R}$ za svako k. Operator A je antiermitski, ako i samo ako je $\lambda_k = -\overline{\lambda_k}$, ondosno ako i samo ako su svi brojevi λ_k čisto imaginarni. Na kraju, A je unitaran operator ako i samo ako je $\lambda_k \overline{\lambda_k} = 1$ za svako k.

Dakle,

$$A = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k$$

je ortogonalna spektralna dekompozicija operatora A.

Tvrđenje 2.6.1. *U skladu sa prethodnim oznakama, $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$ i $V_k = P_k(V)$ su odgovarajući sopstveni potprostori od A.*

Dokaz. Neka je $x \in V_k$. Tada je

$$Ax = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_j \right) P_k x = \lambda_k x,$$

odakle sledi $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subset \sigma(A)$.

Obrnuto, neka je $\lambda \in \sigma(A)$ i $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Tada je $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k P_k x = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda P_k x$, odnosno $\sum\limits_{k=1}^{m} (\lambda_k - \lambda) P_k x = 0$. Tada je

$$0 = \left\langle \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k - \lambda) P_k x, \sum_{k=1}^{m} (\lambda_k - \lambda) P_k x \right\rangle = \sum_{k=1}^{m} |\lambda_k - \lambda|^2 \|P_k x\|^2,$$

odakle sledi $|\lambda_k - \lambda|^2 \|P_k x\|^2 = 0$ za svako k. Iz $x \neq 0$ sledi $P_k x \neq 0$ za neko k, te je $\lambda = \lambda_k$. Dakle, $\sigma(A) \subset \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. □

Tvrđenje 2.6.2. *U skladu sa prethodnim oznakama, ako je A ivertibilan operator, tada je $\lambda_k \neq 0$ za svako k, kao i $A^{-1} = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k^{-1} P_k$.*

Tvrđenje 2.6.3. *Ako je P proizvoljni polinom, tada je $P(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} P(\lambda_k) P_k$.*

Teorema 2.6.4. *Ako je $A \in L(V)$ normalan operator, tada postoji tačno jedna ortogonalna spektralna rezolucija operatora A.*

Dokaz. Neka je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ i neka su $V_1, \dots, V_m$ odgovarajući sopstveni potprostori. Na osnovu ranijih rezultata važi $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$. Neka je P_k ortogonalna projekcija na V_k. Tada je $P_1 + \cdots + P_k = I$, $P_i P_j = 0$ za $i \neq j$, te je $P_1, \dots, P_k$ dekompozicija jedinice. Tada je

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} A P_i x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i x = \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i I_i \right) x,$$

odakle sledi

$$A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i.$$

Prema tome, postoji ortogonalna spektralna rezolucija normalnog operatora A.

Pretpostavimo da postoje dve spektralne rezolucija normalnog operatora A, odnosno

$$A = \sum \lambda_i P_i = \sum \lambda_i' P_i'.$$

Kako je $\sigma(A) = \{\lambda_i : i\} = \{\lambda'_i : i\}$, sledi da je broj sabiraka u prethodne dve sume isti, a bez gubljena opštosti se može uzeti da je $\lambda_i = \lambda'_i$. Dakle,

$$A = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i P'_i.$$

Ako je F proizvoljan polinom , tada je

$$F(A) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i) Pi = \sum_{i=1}^{n} P'_i.$$

Neka je

$$F_i(z) = \frac{(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_{i-1})(z-\lambda_{i+1})\cdots(z-\lambda_m)}{(\lambda_i-\lambda_1)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_m)}.$$

Tada je $F_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$, odakle sledi da je $F_i(A) = P_i = P'_i$. □

Teorema 2.6.5. *Neka je $A \in L(V)$ normalan, i neka je $P_1, \dots, P_k$ odgovarajuća ortogonalna dekompozicija jedinice. Tada operator $B \in L(V)$ komutira sa A, ako i samo ako B komutira sa svakim P_k.*

Dokaz. Ako B komutira sa svakim P_k, tada B komutira sa A.

Pretpostavimo da B komitira sa A. Tada B komutira sa $F(A)$ za svaki polinom F. Kao u dokazu prethodbne teoreme, postoji polinom F_k tako da je $F_k(A) = P_k$. Sledi da B komutira sa svakim P_k. □

Neka je A normalan operator i neka je $A = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$ ortogonalna spektralna rezolucija operatora A. Očigleno, operator A je ermitski ako i samo ako je $\lambda_k \in \mathbb{R}$ za svako k, odnosno ako i samo ako je $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

Ako je $\lambda_k \geq 0$ za svako k, onda je lako proveriti da je $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ za svako $x \in V$. Sa druge strane, pretpostavimo da je A pozitivan operator, odnosno da je $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ za svako $x \in V$. Ako je, recimo, $x \in \mathcal{R}(P_k)$, tada je $0 \leq \langle Ax, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle$, odakle sledi da je $\lambda_k \geq 0$. Dakle, ako je A normalan operator, onda je A pozitivan ako i samo ako je $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$.

Teorema 2.6.6. *Neka je A pozitivan operator. Tada postoji jedinstven pozitivan operator B za koji je $B^2 = A$. Operator B se naziva pozitivan kvadratni koren operatora A.*

Dokaz. Ako je A pozitivan, onda je $A = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k P_k$, pri čemu je $\lambda_k \geq 0$. Tada je $B = \sum\limits_{k=1}^{m} \sqrt{\lambda_k} P_k$ i $B^2 = A$. Pretpostavimo da postoji pozitivan operator C tako da je $C^2 = C$. Ako je $C = \sum\limits_{k=1}^{l} \mu_k P'_k$, tada je

$$A = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k = \sum_{k=1}^{l} \mu_k^2 P'_k.$$

Kao i u ranijim razmatranjima, sledi da je $l = m$ i $\lambda_k = \mu_k^2$. Dakle, $B = C$. □

Teorema 2.6.7. *Neka je A ermitski operator. Tada postoje pozitivni operatori B i C, tako da je $A = B - C$.*

Dokaz. Ako je A poozitivan operator, onda je $B = A$ i $C = 0$.

Pretpostavimo da je A ermitski operator koji nije pozitivan. Neka je $A = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k P_k$ ortogonalna spektralna rezolucija operatora A. Tada je $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Neka je $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \geq 0$ i neka je $\lambda_{t+1}, \ldots, \lambda_m < 0$. Neka je $E_k = \mathcal{N}(A - \lambda_k I)$ za svako k. Uvedimo oznake $U = E_1 \oplus \cdots \oplus E_t$ i $W = E_{t+1} \oplus E_m$. Tada je $V = U \oplus W$. Neka je $Kx = Ax$ za $x \in U$, i $Kx = 0$ za $x \in W$. Ako je Q ortogonalan projektor na U, onda je $I - Q$ ortogonalan projektor na W. Tada je

$$P_1 + \cdots + P_t + Q = I$$

ortogonalna dekompozicija jedinice i

$$B = \sum_{k=1}^{t} \lambda_k P_k + 0 \cdot Q$$

spektralna dekompozicija pozitivnog operatora B. Sa druge strane,

$$P_{t+1} + \cdots + P_m + (I - Q) = I$$

je dekompozicija jedinice, i

$$C = -\sum_{k=t+1}^{m} \lambda_k P_k + 0 \cdot (I - Q)$$

je spektralna dekompozicija pozitivnog operatora C. Lako je proveriti da je $A = B - C$. $\square$

Operatori B i C iz prethodne teoreme se nazivaju pozitivan i negativan deo operatora A.

Teorema 2.6.8. *Neka je $A \in L(V)$. Postoji pozitivan operator $P \in L(V)$ i postoji parcijalna izometrija $C \in L(V)$, tako da je $A = CP$. Operatori P i C se mogu tako odabrati da je $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(C)$, i u tom slučaju su oni jedinstveno određeni.*

Dokaz. Kako je $A^*A \geq 0$, onda postoji jedinstveni pozitivan kvadratni koren ovog operatora. Neka je $P = (A^*A)^{1/2} \geq 0$. Neka je $C_1 : \mathcal{R}(P) \to V$ definisan kao $C(Px) = Ax$ za svako $x \in X$. Tada je C_1 dobro definisan linearan operator, i C_1 je izometrija. Neka je $Cy = C_1 y$ za svako $y \in \mathcal{R}(P)$ i neka je $Cy = 0$ za svako $y \in \mathcal{R}(P)^\perp = \mathcal{N}(P)$. Tada je C parcijalna izometrija i $A = CP$ je tražena dekompozicija. $\square$

Analogno se može dokazati dekompozicija $A = QD$, pri čemu je Q pozitivan operator i D je parcijalna izometrija. U ovom slučaju dekompozicija je jedinstvena ako se zahteva $\mathcal{N}(Q)^\perp = \mathcal{R}(D)$.

Glava 3

Norma operatora

3.1 Norma na vektorskom prosotru

Definicija 3.1.1. Neka je V konačno dimenzionalana kompleksan (ili realan) vektorski prostor. Funkcija $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ je norma na V, ako za svako $x, y \in V$ i svako $\lambda \in \mathbb{C}$ važe svojstva:

(a) $\|x\| \geq 0$;
(b) $\|x\| = 0$ ako i samo ako $x = 0$;
(c) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ (homogenost);
(d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (nejednakost trougla).

U tom slučaju je $(X, \|\cdot\|)$ normirani prostor, ili X je normirani prostor, ako se norma $\|\cdot\|$ podrazumeva.

Definicija 3.1.2. Niz $(x_n)_n$ normiranog prostora V konvergira ka vektoru $x \in V$ u smislu norme $\|\cdot\|$, ako $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Oznaka je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Na jednom vektorskom prostoru može se na više načina zadati norma. Jedan primer je norma koja je indukovana skalarnim proizvodom.

Primer 3.1.1. Neka je $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ jedna fiksirana baza prostora V. Ako je $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in V$, tada su sledeće funkcije norme na V:

(a) $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$;

(b) $\|x\|_2 = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}$;

(c) $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$;

(d) $\|x\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|$.

Dokaz. Norma $\|\cdot\|_2$ je euklidska norma i ona proizilazi iz skalarnog proizvoda. Naime, ako se za svako $x, y \in V$ definiše funkcija $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}$, tada je $\langle \cdot, \cdot\rangle$ skalarni proizvod u V, i $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x, \rangle}$.

Direktno se proverava da funkcije $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$ takođe jesu norme. U slučaju funkcije $\|\cdot\|_p$, sve osobine norme je jednostavno proveriti, osim nejednakosti trougla. Nejednakost trougla sledi da osnovu nejednakosti Minkovskog za sume. □

Tvrđenje 3.1.1. *Neka je $(V, \|\cdot\|)$ normirani prostor. Tada za svako $x, y \in V$ važi nejednakost $\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\|$.*

Posledica 3.1.1. *Norma je (ravnomerno) neprekidna funkcija iz V u $\mathbb{R}$. Drugim rečima, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ u V, tada je $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$ u $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Sledi iz prethodnog tvrđenja. □

Definicija 3.1.3. Neka je V normirani prostor, $x \in V$ i $r > 0$. Skupovi $K(x, r) = \{y \in V : \|x - y\| < 1,\ K[x, r] = \{y \in V : \|x - y\| \leq r\}$ i $S(x, r) = \{y \in V : \|x-y\| = r\}$, jesu, redom, otvorena kugla, zatvorena kugla i sfera, sa centrom u x poluprečnika r.

Tvrđenje 3.1.2. *Skupovi $K[x, r] = \{y \in V : \|x - y\| \leq r\}$ i $S(x, r) = \{y \in V : \|x - y\| = r\}$ jesu kompaktni skupovi u $\mathbb{C}^n$.*

Teorema 3.1.1. *Neka su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ dve norme na prosotoru V, pri čemu je $\dim(V) < \infty$. Tada postoje konstante $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, tako da za svako $x \in V$ važi*

$$k_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq k_2\|x\|_2.$$

Drugim rečima, svake dve norme na konačno dimenzionalnom vektorskom prostoru su međusobno ekvivalentne.

Dokaz. Posmatrajmo normu $\|(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\|' = |\lambda_1|+\cdots+|\lambda_n|$ u prostoru $\mathbb{C}^n$. Neka je $\mathcal{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ jedna baza prostora V. Ako je $x\in V$ i $x=x_1e_1+\cdot+x_ne_n$, tada neka je $\|x\|_3=|x_1|+\cdot+|x_n|$. Funkcija $\|\cdot\|_3$ je norma na prostoru V. Važi

$$\|x\|_1=\|x_1e_1+\cdots+x_ne_n\|_1\le|x_1|\|e_1\|_1+\cdots+|x_n|\|e_n\|_1.$$

Neka je $M=\max\{\|e_1\|_1,\ldots,\|e_n\|_1\}$. Tada je

$$\|x\|_1\le M\|x\|_3.$$

Funkcija $F:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}$, definisana kao

$$F(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=\|\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n\|_1$$

je neprekidna na $\mathbb{C}^n$. Stoga je ova funkcija neprekidna na sferi $S=S(0,1)$, koja je kompaktan podskup od $\mathbb{C}^n$. Ova neprekidna funkcija dostiže svoj minimum na skupu S, odnosno postoji $(\mu_1,\ldots,\mu_n)\in S$, tako da za svako $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in S$ važi $f(\mu_1,\ldots,\mu_n)\le f(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. Posmatramo vektor $x_0=\mu_1e_1+\cdot+x_ne_n$, koji očigledno ne može biti jednak 0. Važi $\|x_0\|_3=1$. Ako je $\sum\limits_{i=1}^n|\lambda_i|=1$ i $y=\lambda_1e_1+\cdot+\lambda_ne_n$, tada je $\|x_0\|_1\le\|y\|_1$. Drugim rečima, ako je $y\in V$ i $\|y_3\|=1$, tada je $\|x_0\|_1\le\|y\|_1$.

Neka je $x\in V$ proizvoljan vektor, koji nije 0. Neka je $y=\frac{x}{\|x\|_3}$. Tada je $\|y\|_3=1$. Stoga je $\|x_0\|_1\le\|y\|_1$, odnosno $\|x_0\|_1\le\left\|\frac{x}{\|x\|_3}\right\|_1$, odakle sledi $\|x_0\|_1\|x\|_3\le\|x\|_1$. Ako je $m=\|x_0\|_1$, onda sledi nejednakost

$$m\|x\|_3\le\|x\|_1\le M\|x\|_3.$$

Prema tome, norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_3$ su ekvivalentne.

Na potpuno isti način se dokazuje da su norme $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_3$ ekvivalentne, odnosto postoje konstatne $m,,M,\in\mathbb{R}$, tako da za svako $x\in V$ važi

$$m'\|x\|_3\le\|x\|_2\le M'\|x\|_3.$$

Tada je

$$k_1\|x\|_2\le\|x\|_2\le k_2\|x\|_1$$

za svako $x\in V$, pri čemu je $k_1=\frac{m}{M'}$ i $k_2=\frac{M}{m'}$. $\square$

Posledica 3.1.2. *Neka je $(x_n)_n$ niz vektora u vektorskom prostoru V, i neka su $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ sve norme na prostoru V. Tada $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_1 = 0$ ako i samo ako $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\|_2 = 0$.*

Primer 3.1.2. Naći konstante k_1 i k_2 u Teoremi 3.1.1 za svaki par normi iz skupa $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$.

Primer 3.1.3. Dokazati da je $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ za svako $x \in V$.

Tvrđenje 3.1.3. *Neka su V_1 i V_2 vektorski prostori i neka je $\|\cdot\|$ norma na prostoru V_2. Ako je $T \in L(V_1, V_2)$ izomorfizam, tada je funkcija $\|x\|' = \|Tx\|$, za svako $x \in V_1$, norma na vektorskom prostoru V_1.*

Definicija 3.1.4. Dva normirana prostora $(V_1, \|\cdot\|')$ i $(V_2, \|\cdot\|)$ su izometrički izomorfna, ako postoji izomorfizam $T \in L(V_1, V_2)$, tako da za svako $x \in V_1$ važi $\|x\|' = \|Tx\|$.

Posledica 3.1.3. *Ako je $(V, \|\cdot\|)$ proizvoljan n-dimenzionalan vektorski prostor. Tada postoji norma $\|\cdot\|'$ na prostoru $\mathbb{C}^n$, tako da su prostori $(V, \|\cdot\|)$ i $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|')$ međusobno izometrički izomorfni.*

Definicija 3.1.5. Skup K u normiranom prostoru V je kompaktan, ako za svaki niz tačaka $(x_n)_n$ u K postoji njegov podniz $(x_{n_k})_k$ i postoji $x \in K$, tako da je $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

Tvrđenje 3.1.4. *Skupovi $K[x, r]$ i $S(x, r)$ jesu kompaktni skupovi u normiranom prostoru V.*

Dokaz. Pomenuti skupovi jesu kompaktni u $\mathbb{C}^n$ u odnosu na euklidsku normu. Zbog ekvivalentnosti svih normi na prostoru $\mathbb{C}^n$, sledi da su ovi skupovi kompaktni u $\mathbb{C}^n$ u odnosu na bilo koju normu. Na osnovu teoreme o izometričnosti konačno dimenzionalnog prostora sa $\mathbb{C}^n$, sledi da su $K[x, r]$ i $S(x, r)$ jesu kompaktni skupovi u V. □

3.2 Norma operatora

Definicija 3.2.1. Neka su V_1, V_2 normirani prostori i neka je $A \in L(V_1, V_2)$. Tada je norma operatora A definisana kao

$$\|A\| = \sup_{x\in S(0,1)} \|Ax\|.$$

Teorema 3.2.1. *Neka su* $(V_1, \|\cdot\|_1)$ *i* $(V_2, \|\cdot\|_2)$ *normirani prostori. Za svako* $A \in L(V_1, V_2)$ *je* $\|A\| \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka je $B = (e_1, \dots, e_n)$ baza prostora V_1 i neka je $x \in V_1$. Tada je $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ i $Ax = \lambda_1 Ae_1 + \cdots + \lambda_n Ae_n$. Neka je $\|x\|' = |\lambda_1| + \cdot + |\lambda_n|$. Tada je $\|\cdot\|$ jedna norma na prostoru V_1, koja je ekvivalentna normi $\|\cdot\|_1$. Postoji konstanta k, tako da za svako $x \in V_1$ važi $\|x\|' \leq k\|x\|_1$. Tada je

$$\begin{aligned}\|Ax\|_2 &\leq |\lambda_1|\|Ae_1\|_2 + \cdots + |\lambda_n|\|Ae_n\|_2 \leq \max_i \|Ae_i\|_2 \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \\ &= \max_i \|Ae_i\|_2 \|x\|' \leq k \max_i \|Ae_i\|_2 \|x\|.\end{aligned}$$

Tada je $\|A\frac{x}{\|x\|_1}\|_2 \leq M$, odakle sledi da je $\sup_{y \in S(0,1)_1} \|Ay\| < \infty$. $\square$

Tvrđenje 3.2.1. *Za* $A \in L(V_1, V_2)$ *važi*

$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_2 : \|x\|_1 \leq 1\} = \inf\{M : \|Ax\|_2 \leq M\|x\|_1$ za svako $x \in V_1\}$.

Tvrđenje 3.2.2. *Preslikavanje* $A \mapsto \|A\|$ *je norma na vektorskom prostoru* $L(V_1, V_2)$. *Štaviše, ako je* $B \in L(V_2, V_3)$, *tada je* $\|BA\| \leq \|B\|\|A\|$.

Dokaz. Neka je $x \in V_1$. Tada je

$$\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|.$$

Kako je $\|AB\|$ najmanji broj sa navedenom osobinom, sledi da je $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Neka je $A, C \in L(V_1, V_2)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$. Za svako $x \in V_1$ važi

$$\|(A + C)x\| = \|Ax + Cx\| \leq \|Ax\| + \|Cx\| \leq (\|A\| + \|C\|)\|x\|,$$

odakle sledi $\|A + B\| \leq \|A\| + \|C\|$.

Takođe je

$$\|\lambda A\| = \sup_{x \in S(0,1)} \|\lambda Ax\| = |\lambda| \sup_{x \in S(0,1)} \|Ax\| = |\lambda|\|A\|.$$

$\square$

Teorema 3.2.2. *Preslikavanje $A \in L(V_1, V_2)$ je (ravnomerno) neprekidno.*

Dokaz. Ako je $x, y \in V_1$, tada je $\|Ax - Ay\| \leq \|A\|\|x - y\|$, odakle sledi ravnomerna neprekidnost preslikavanja A. $\square$

Neka je $(x_n)_n$ niz u normiranom prostoru V, i neka je $S_n = x_1 + \cdots + x_n$. Ako je niz $(S_n)_n$ konvergentan ka $S \in V$, tada red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergira ka vektoru S, i tada je $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Neka je $(x_n)_n$ niz vekotra u V. Ako red $\sum \|x_n\|$ konvergira, onda red $\sum x_n$ apsolutno konvergira.

Teorema 3.2.3. *Ako red $\sum x_n$ apsolutno konvergira, onda ovaj red konvergira.*

Dokaz. Neka je $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ i $\sigma_n = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$. Pretpostavimo da je red $\sum \|x_n\|$ konvergentan i neka je $\epsilon > 0$. Postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $m > n \geq n_0$ važi $\sigma_m - \sigma_n < \epsilon$. Tada je $\|S_m - S_n\| \leq \sigma_m - \sigma_n < \epsilon$, te je $(S_n)_n$ Košijev niz u V. Kako je V konačno dimenzionalan prostor, tada je on kompletan, odnosno svaki Košijev niz konvergira. Dakle, $(S_n)_n$ je konvergentan niz. $\square$

Teorema 3.2.4. *Neka je $A \in L(V)$ i $\|A\| < 1$. Tada je $I - A$ invertibilan operator, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n$ je konvergentan red i $(I - A)^{-1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A^n$.*

Dokaz. Važi $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, te je zbog $\|A\| < 1$ red $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \|A^n\|$ konvergentan, odakle sledi da je $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ konvergentan i $\lim\limits_{n \to \infty} A^n = 0$. Kako je

$$(I - A) \sum_{k=0}^{n} A^k = \left(\sum_{k=0}^{n} A^k \right) (I - A) = I - A^{n+1} \to I$$

kada $n \to \infty$, sledi da je

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

$\square$

Teorema 3.2.5. *Ako je $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in L(V)$ i $|\lambda| > \|A\|$, tada je $\lambda I - A$ invertibilan i $(\lambda I - A)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$.*

Dokaz. Kako je $|\lambda| > \|A\|$, sledi da je $\left\|\frac{a}{\lambda}\right\| < 1$, te je

$$\left(I - \frac{A}{\lambda}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^n}.$$

Odavde sledi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} = \lambda^{-1}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1}.$$

□

Posledica 3.2.1. *Ako je $A \in L(V)$, onda za svako $\lambda \in \sigma(A)$ važi $|\lambda| \leq \|A\|$.*

Definicija 3.2.2. Ako je $A \in L(V)$, onda je spektralni radijus operatora A definisan kao $r(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Posledica 3.2.2. *Ako je $A \in L(V)$, onda je $r(A) \leq \|A\|$.*

Teorema 3.2.6. *Neka je $A \in L(V)$. Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$ ako i samo ako je $r(A) < 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$ i neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Postoji $x \in V$, $\|x\| = 1$, tako da je $Ax = \lambda x$. Sledi da je $A^n x = \lambda^n x$. Iz $\lim\limits_{n\to\infty} A^n = 0$ sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n x = 0$, odakle sledi da mora biti $|\lambda| < 1$. Sledi da je $r(A) < 1$.

Sa druge strane, pretpostavimo da je $r(A) < \lambda$, odakle sledi da je $|\lambda| < 1$ za svako $\lambda \in \mathbb{C}$. Postoji invertibilan operator U tako da je $A = U^{-1}JU$, pri čemu je J Žordanov operator. Tada je $A^n = U^{-1}J^nU$. Ako je $J_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$ jedan Žordanov blok, tada je

$$[J_k^n] = \begin{bmatrix} P_n(\lambda) & P_{n-1}(\lambda) & \cdots & P_{n-k+1}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix},$$

pri čemu je P_j polinom stepena j. Za dovoljno veliko n ne postoji slobodan član ni u jednom ulazu matrice $[J_k]^n$. Svaki ulaz matrice $[J_k]^n$ jeste polinom sa najviše $n-k$ članova, redom stepena $\lambda^n, \ldots, \lambda^{n-k}$. Kako je $|\lambda| < 1$, sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(\lambda) = 0$. □

Tvrđenje 3.2.3. *Ako je $A \in L(V)$ i $n \in \mathbb{N}$, tada je $r(A^n) = r(A)^n$.*

Dokaz. Sledi na osnovu teoreme o preslikavanju spektra polinomom. □

Napominjemo da preslikavanje $A \mapsto r(A)$ nije neprekidna funkcija.

Teorema 3.2.7. *Ako je $A \in L(V)$, tada je $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada je $r(A)^n = r(A^n) \leq \|A^n\|$, odakle sledi $r(A) \leq \|A^n\|^{1/n}$.

Neka je $\epsilon > 0$ i posmatrajmo operator $A_1 = \frac{A}{r(A)+\epsilon}$. Tada je $r(A_1) < 1$, odakle sledi $\lim\limits_{n\to\infty} A_1^n = 0$. Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} \|A_1^n\| = 0$. Prema tome, postoji neko $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je $\|A_1^n\| < 1$ za svako $n \geq n_0$. Tada je $\|A^n\| < [r(A)+\epsilon]^n$ za svako $n \geq n_0$. Prema tome, ako je $n \geq n_0$, onda je $\|A^n\|^{1/n} \leq r(A)+\epsilon$.

Dakle, za svako $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svako $n \geq n_0$ važi $r(A) \leq \|A^n\|^{1/n} < r(A)+\epsilon$. Sledi da je $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = r(A)$. □

Teorema 3.2.8. *Ako je $A \in L(V)$ normalan operator, tada je $r(A) = \|A\|$.*

Dokaz. Neka je $A \in L(V)$ normalan operator i neka je $B = A^*A$. Kako je $B^* = B$, sledi da je $\|B\|^2 = \|B^*B\| = \|B^2\|$. Sledi da je $\|B\|^{2^k} = \|B^{2^k}\|$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Sledi da je

$$\|B\| \lim_{k\to\infty} \|B^{2^k}\|^{1/(2^k)} = r(B).$$

Sada je

$$\|A\|^2 = \|A^*A\| = r(A^*A).$$

Iz činjenice da je A normalan operator sledi da je $(A^*A)^n = (A^*)^n A^n$ za svako $n \in \mathbb{N}$. Stoga je

$$\|(A^*A)^n\| = \|(A^*)^n A^n\| = \|A^n\|^2,$$

odakle je

$$\|(A^*A)^n\|^{1/n} = (\|A^n\|^{1/n})^2.$$

Sledi da je

$$\|A\|^2 = r(A^*A) = (r(A))^2,$$

odakle proizilazi kranji rezultat. □

Teorema 3.2.9. *Ako je $A \in L(V)$ samokonjugovan operator, tada je*

$$\sigma(A) \subset [m(A), M(A)], \quad m(A), M(A) \in \sigma(A).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $0 \leq m(A) \leq M(A)$. Tada je $M(A) = r(A) = \|A\|$, te je $M(A) \in \sigma(A)$.

Pretpostavimo sada da je $|m(A)| \geq M(A)$. Posmatramo ermitski operator $B = A - m(A)I$. Tada je $B \geq 0$, odakle sledi $0 \leq m(B) \leq M(B)$. Sledi da je $M(B) \in \sigma(B)$. Na osnovu teoreme o preslikavanju spektra polinomom sledi da je $M(A) - m(A) \in \{\lambda - m(A) : \lambda \in \sigma(A)\}$, odakle sledi $M(A) \in \sigma(A)$.

Dakle, u svakom slučaju je $M(A) \in \sigma(A)$ za svaki ermitski operator A.

Neka je $C = -A$. Tada je C takođe ermitski operator, te je $M(C) \in \sigma(C)$. Sledi da je $-m(A) \in \{-\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$, odakle sledi $m(A) \in \sigma(A)$. □

Posledica 3.2.3. *Ako je $A \in L(V)$, tada je $\|A\| = \sqrt{r(A^*A)}$.*

Literatura

[1] A. Ben-Izrael, T. N. E. Greville, *Generalized inverses, theory and applicaions*, Sec. Ed., Springer, New York, 2003.

[2] Lj. Dedić, *Vektorski prostori*, skripta, Prirodnoslovno-matematički fakultet u Splitu, 2009.

[3] N. V. Efimov, E. R. Rozendorn, *Lineĭnaja algebra i mnogomernaja geometrija*, Nauka, Moskva, 1970.

[4] I. M. Gel'fand, *Lekcii po lineĭnoĭ algebri*, Nauka, Moskva, 1966.

[5] P. R. Halmos, *Finite dimensional vector spaces*, Springer, Berlin, 1974.

[6] R. Horn, C. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 1985.

[7] R. Horn, C. Johnson, *Topics in matrix analysis*, Cambridge University Press, 1991.

[8] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1976.

[9] Lj. Kočinac, *Linearna algebra i analitička geometrija*, Univerzitet u Nišu, Niš, 1991.

[10] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

[11] I. Milošević, *Vektorski prostori i vektorska analiza*, Univerzitet u Beogradu, 1997.

[12] V. Rakočević, *Funkcionalna analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1994.

[13] S. Roman, *Advanced linear algebra*, Sec. Ed., Springer, New York, 2005.

[14] M. Vujičić, *Linear algebra thoroughly explained*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2008.

[15] F. Yhang, *Matrix theory: basic results and techniques*, Springer, 1999.