Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу, Србија
http://www.pmf.ni.ac.yu/mii
Математика и информатика 1 (1-2) (2008), 1-8

Системи линеарних једначина

Весна Јевремовић

Системи линеарних једначина се појављују у многим областима математике од најдавнијих времена, па се стога постоје и разни поступци и проучавају се разне методе за решавање система линеарних једначина. Један од приступа, у случају једначина са две или три непознате је и примена геометријске интерпретације. Тако, например, пошто се линеарна једначина са две непознате може посматрати и као једначина праве линије у правоуглом координатном систему, онда се решавање система од две линеарне једначине са две непознате своди на налажење пресечне тачке одговарајућих правих.

Системи линеарних једначина се решавају тако што се низом еквивалентних трансформација полазни систем постепено поједностављује и доводи до облика у коме се вредности непознатих непосредно одређују. Еквивалентне трансформације су: замена места једначинама у систему, множење једначине константом и додавање једне једначине другој. Свака од наведених операција преводи полазни систем у систем који му је еквивалентан у смислу да има исто решење као и полазни систем. Вишеструким понављањем тих операција се долази до решења полазног система једначина.

Ево једног примера. Решити систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 9x + y + 2z &= 17 \\ x + 5y + z &= 14 \\ 2x + y + 4z &= 16 \end{aligned} .$$

Решење.

1. корак – замена места прве и друге једначине (*на тај начи прва једначина има коефицијент 1 уз непознату x, што мало олакшава даље рачунање*)

$$\begin{aligned} x + 5y + z &= 14 \\ 9x + y + 2z &= 17 \\ 2x + y + 4z &= 16 \end{aligned}$$

2. корак – множење прве једначине са -2 и додавање трећој (*на тај начин у трећој једначини више не фигурише непозната x*)

$$
\begin{aligned}
x+5y+z&=14\\
9x+y+2z&=17\\
-9y+2z&=-12
\end{aligned}
$$

3. корак – множење прве једначине са -9 и додавање другој (*на тај начин у другој једначини више не фигурише непозната x*)

$$
\begin{aligned}
x+5y+z&=14\\
-44y-7z&=-109\\
-9y+2z&=-12
\end{aligned}
$$

4. корак – множење друге једначине са 2, и множење треће једначине са 7 (*на тај начин коефицијенти уз непознату z у тим двема једначинама су једнаки по апсолутној вредности, али супротног знака*)

$$
\begin{aligned}
x+5y+z&=14\\
-88y-14z&=-218\\
-63y+14z&=-84
\end{aligned}
$$

5. корак – додавање друге једначине трећој (*на тај начин у трећој једначини фигурише само непозната y*)

$$
\begin{aligned}
x+5y+z&=14\\
-88y-14z&=218\\
-151y&=-302
\end{aligned}
$$

6. корак – решавањем треће једначине добија се да је вредност непознате y једнака 2.
7. корак – заменом вредности непознате y у другој једначини добија се да је вредност непознате z једнака 3.
8. корак – заменом вредности непознатих y и z у првој једначини добија се да је вредност непознате x једнака 1.

Решење је уређена тројка бројева (1,2,3). Геометријска интерпретација решења је да се равни чије су једначине уствари једначине система, секу у тачки са координатама (1,2,3).

Поступак примењен у овом решењу је тзв. Гаусова метода елиминације непознатих. Метода је једноставна, и само треба бити обазрив при израчунавању. Стога је корисно по завршеном поступку добијене вредности непознатих заменити у свакој једначини полазног система и уверити се да постају идентитети, јер се тако сигурно проверава тачност решења.

У вези са Гаусовом методом треба напоменути да је уобичајено поступак бележити шематски, тако да се бележе само коефицијенти уз непознате и слободни чланови једначина у одговарајућем редоследу. Затим се над врстама тако формиране шеме изводе елементарне трансформације. Ево како изгледа шема која одговара другом кораку у датом решењу (линије између поља су задржане ради прегледности):

$$x + 5y + z = 14$$
$$9x + y + 2z = 17$$
$$-9y + 2z = -12$$

1	5	1	14
9	1	2	17
0	-9	2	-12

Системи линеарних једначина у старокинеској математици

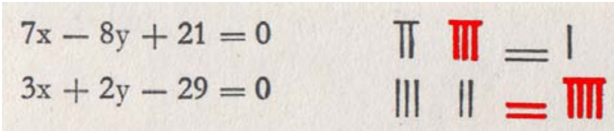
У најстаријим сачуваним збиркама задатака из старе Кине, а оне потичу из периода пре нове ере, има много примера задатака чије решавање се своди на решавање система линеарних једначина.

Системе линераних једначина су решавали шематски, а поступак је развијен полазећи од кинеске табле за рачунање. Кинеска табла за рачунање је специфични кинески изум. Рачунање је обављано тако што се одређени број штапића постављао на свако поље и по утврђеним правилима се добијао збир, разлика, производ, количник. Али ту је и основа за неке методе комбинаторике као и за решавање система једначина.

На слици, чији је наслов „Учитељ и ученик постављају тешка питања један другом”, видимо како је изгледала кинеска табла за рачунање.

Сл. 1. *Кинеска табла за рачунање*

Следећа слика показује начин записивања система једначина на табли. На левој страни је европски начин, а на десној старокинески. Записани су само коефицијенти, при чему се негативни бројеви представљају штапићима друге боје.



Сл. 2. *Систем линеарних једначина*

У збиркама се тачно знало како се који од коефицијената уз непознате назива и упутства су била тако и формулисана. Задатке су решавали и рачунањем детерминанте система и детерминанти које одговарају непознатим. Значи да су познавали оно што данас називамо Крамерово правило. Други начин који су примењивали је оно што се у „нашој” математици назива Гаусова метода елиминације. Карактеристично је да су у тим почетним збиркама системи једначина увек били са једнаким бројем једначина и непознатих. У почетку срећемо углавном системе са 2 или 3 једначине, а касније и системе са више једначина, и са различитим бројем једначина и непознатих.

Ево неколико старокинеских задатака у вези са решавањем система линеарних једначина:

1. Три снопа жита са парцеле где је био добар принос (добар сноп), два снопа са парцеле где је средњи принос (средњи сноп) и један сноп са парцеле где је био лош принос (лош сноп), дају 39 доуа зрна. Од два добра, три средња и једног лошег снопа добијена су 34 доуа. Из једног доброг снопа, два средња и три лоша 26 доуа. Колико се добије из сваког доброг, средњег и лошег снопа?

Кинески поступак елиминације, за разлику од Гаусовог, који је „пронађен” много векова касније, подразумева вертикални запис коефицијената система. У наведеном примеру, који преведен у систем једначина постаје

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34, \\ x + 2y + 3z &= 26 \end{aligned}$$

шема са коефицијентима је облика

3	2	1	39
2	3	1	34
1	2	3	26

У кинеском решењу одмах су поређане једначине тако да се смањи број потребних операција (довођење „1” у горњи леви угао), а коефицијенти су поређани вертикално, пошто су Кинези у то време писали усправно.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39.

Решење система је уређена тројка бројева (37/4, 17/4, 11/4). Из текста овог, а и осталих задатака из кинеских збирки, уочава се да су „реални”, узети из стварности, и да нису бирани коефицијенти тако да се добију, у неком смислу „лепа” решења, нпр. цели бројеви.

2. Продата су два бивола и пет овнова а купљено је тринаест свиња и остало је хиљаду новчића. Када је продато три бивола и три свиње било је довољно новца да се купи девет овнова. Када се прода шест овнова и осам свиња да би се купило пет бивола, недостаје шестсто новчића. Колико коштају биво, ован и свиња?

Решење система је уређена тројка бројева (1200, 500, 300).

Код система линеарних једначина срећу се и задаци у којима постоји више непознатих него једначина, али уз неки додатни услов који омогућава да се решење одреди једнозначно. Ево и таквих примера:

3. Из три бурета у којима су биле једнаке количине пиринча, три лопова су крала пиринач. Испоставило се да је у првом бурету остао 1 г’ пиринча, у другом 1 сјинг 6 г’-а, и у трећем 1 г’. Први лопов је признао да је узимао пиринач помоћу лопате, други да је користио своју дрвену ципелу, а трећи чинију. Први је лопов узимао само из првог бурета, други само из другог, а трећи из трећег. У лопату може да стане 1 сјинг 9 г’, у дрвену ципелу 1 сјинг 5 г’ а у чинију 1 сјинг 2 г’-а. Колико је који лопов узео пиринча, ако је познато да је 10 г’ један сјинг, 10 сјинг 1 тао а 10 тао један ш’?

Решење које ће бити размотрено, подразумева да се прво задатак „преведе“, тако што установимо које су величине непознате и која је веза међу њима. Непозната је количина пиринча у бурадима, и нека је она означена са *X*. Непознато је колико пута је који од лопова захватао пиринач из „свог“ бурета, али по резултатима се види да је онај који је користио чинију, а у њу стане мање пиринча него у лопату или дрвену ципелу, био најбржи! Нека су величине *А, Б, С* бројеви захвата првог, другог и трећег лопова редом. С обзиром на дату везу мерних јединица, може се записати да у лопату стане 1.9, у дрвену ципелу 1.5, а у чинију 1.2 сјинга пиринча. Стога ће и величина *X* бити изражена у истој мери. Према условима задатка (тј. пљачке), добија се систем једначина:

$$\begin{aligned} 1.9A + 0.1 &= X \\ 1.5B + 1.6 &= X \\ 1.2C + 0.1 &= X \end{aligned} .$$

Посматрани систем има три једначине, а четири непознате, уз додатни услов, који произилази из природе задатка, да су *А, Б, С* природни бројеви. Ако се од прве једначине одузме друга, добија се

$$1.9A - 1.5B - 1.5 = 0,$$

а ако се од прве једначине одузме трећа добија се

$$1.9A - 1.2C = 0 .$$

Ако се једначина помножи са 10 добија се

$$19A - 12C = 0$$

Из ове једначине, пошто су 12 и 19 узајамно прости бројеви, а *А* и *С* природни бројеви следи да мора бити *А*=12*k*, а *С*=19 *k*, где је *k* неки природни број. Кад се прва једначина помножи са 10 и уврсти вредност за *А* добија се

$$19 \cdot 12k - 15B - 15 = 0 .$$

Треба одредити природни број *k* за који је број $19 \cdot 12k - 15$ дељив са 15. Најмањи такав број је 5. Дакле, први лопов је захватао 60 пута, други 75 пута, а трећи 95 пута. У сваком од буради било је по 1140.1 сјинга пиринча, а то је 114.01 тао пиринча, односно 11.401 ш’-а.

4. Пет породица користи исти бунар. Свака породица има ужад одређене дужине. Да би се доспело до површине воде, на два ужета породице Џанг треба везати једно уже породице Џао, на три ужета породице Џао једно уже породице Ванг, на четири ужета породице Ванг једно уже породице Гао, на пет ужади породице Гао једно уже породице Лиу, а на шест ужади породице Лиу једно уже породице Џанг. Колика је дубина бунара, а колика је дужина појединачних ужади сваке породице?

Овде имамо 5 једначина, а 6 непознатих, уз услов да се дубина бунара изражава бројем који обезбеђује да су вредности осталих непознатих целобројне и најмање могуће! Добија се да је дубина бунара 721 (у одређеним мерним јединицама), а најкраће од ужади 76.

5. Петао кошта 5 новчића, кокошка 3, а три пилета један новчић. За 100 новчића купљено је 100 комада перади (живине). Колико је купљено петлова, кокошака и пилића?

Ово је један од знаменитих проблема, потиче из 5 века нове ере, а карактеристичан је и по томе што има три нетривијална (број купљених петлова, кокошака и пилића је редом: 12, 4, 84; 8, 11, 81 или 4, 18, 78) и једно тривијално решење (број купљених петлова је 0, кокошака 25 и пилића 75). Поступак решавања подразумева анализу великог броја могућности и постепено сужавање на скуп решења. Задатак се и данас решава у школама, да би ученици били упознати са традицијом и достигнућима својих предака.

Задаци

1. Решити задатак дат на слици 2.
2. Решити задатак 1.
3. Написати систем једначина у задатку 2, и решити га.
4. Написати систем једначина у задатку 4, и решити га.
5. Написати систем једначина у задатку 5, и решити га.
6. Пет бивола и два овна коштају 10 мерица злата, а 2 бивола и 5 овнова коштају 8 мерица злата. Колико кошта биво, а колико ован?
7. Девет полуга злата је тешко као 11 полуга сребра. Ако се једна полуга злата премести на тас са сребрним полугама, а једна полуга сребра на тас са златним полугама, онда на страну са златним полугама треба додати 13 мерица злата. Колико тежи једна сребрна, а колико једна златна полуга?
8. Два снопа доброг приноса и један сноп средњег приноса, 3 снопа средњег приноса и један сноп слабог приноса, а такође и 4 снопа слабог приноса и један сноп доброг приноса теже исто – по један доу. Колико тежи сваки појединачни сноп?

Литература

1. Чистяков, Василий Дмитриевич, *Старинные задачи по элементарной математике*, Вышэйшая школа, Минск 1978.

2. Хогбен, Ланселот, *Стварање математике*, Вук Караџић, Београд 1972.
3. Heedham, Joseph T. M, *Ccience And Civilisation Ин China, Bol. 3, Mathematics And The Cciences Of The Heavens And The Earth*, Cambridge University Пress, Cambridge 1995.
4. Јевремовић, Весна, *Старокинеска математика*, Настава математике, ЛИ, 1-2, Београд 2006.

Адреса аутора:

Математички факултет, Универзитет у Београду